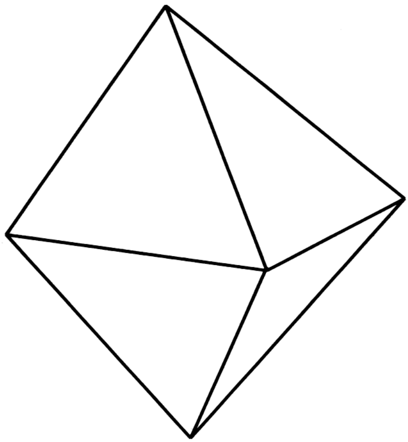
四元数と八元数

幾何, 算術, そして対称性

J.H. コンウェイ・D.A. スミス 共著
山田 修司 訳

培風館



On Quaternions and Octonions
Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry

by
John H. Conway and Derek A. Smith

本書を Lilian Smith と Gareth Conway とに贈る．
彼女たちがいなければ，この本はもっと早くに完成していたことでしょう．

はじめに

この本は，四元代数および八元代数の幾何と算術とについて解説した本である．これらの代数[1]は，あるユークリッド空間における幾何の特徴と密接に関係していて，それらは低次元の対称群を理解するための有用な道具となる．例えば，3 次元の群と 4 次元の群との間には特殊な関係があり，それらは四元数を用いることによって明らかなものとなる．なぜなら，3 次元の回転は一つの四元数で特定することができ，4 次元の回転は二つの四元数で特定することができるからである．ただし写像が 1-対-1 ではなくて 2-対-1 であるため，その詳細は微妙なものとなる．

多くの読者は四元数に関してはよく知っていると思われるので，第 II 部では，四元数の性質は既知のこととして，それを 3, 4 次元の有限群の列挙ために利用する (2 次元の群の場合に複素数が用いられたことと同様)．そして，フルビッツ四元整数の算術について，それを幾何的に考察することで何がわかるか，という議論を行い，特に，その一意分解定理を確立することで，第 II 部を終える．

第 III 部の主なテーマは，特記すべき “トリアリティ対称性 (triality symmetry)” であり，それは八元数との関係において現れる．とはいえ，多くの読者は八元数に慣れ親しんでいるとは思われないので，Hurwitz の有名な定理の証明からはじめる．この定理は，$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ そして $\mathbb{O}$ が，そのような種類[2]の環のすべてであることを主張するものであるが，その証明はそれらを構成するため

[1] ［訳注］ algebra という数学用語は「代数」「多元環」あるいは単に「環」という日本語に訳されるが，本書では「代数」に統一した．

[2] ［訳注］ 組成代数という種類．

の最良の方法をもたらすからである．この証明の手法を用いて，これらの環がモゥファン・ループとなることを示す．そして，トリアリティを明らかにする過程でモゥファン・ループについて考察をし，それを 8 次元直交群の特殊な場合に適用する．

Dickson, Bruck そして Coxeter によって定義された八元整数の算術については，深い研究はなされていない．本書の最後の章では，その状況をいくつかの方法によって向上させる．まず，Rehm による手法を用いて，八元整数の新しい分解定理をつくり上げる．また，それらの自己同型群がいくつかの重要な部分環へ作用する様子を述べ，それらのいくつかの安定化部分群となる局大部分群をみつける．そして，ある場合においては，2 を法として八元整数をみることに至る．最後に，有名な八元射影平面についての短い章で，本書を終える．

任意の体上の代数のいろいろな性質を，交代法則のような最小限の仮定から演繹するためには，非常に複雑な議論が必要となる．我々は，組成性からはじめてそして実数体上の古典的な代数に制限することにより，議論を単純なものに保つことを選んだ．

ビデオゲームのプログラマーは，宇宙船の制御装置が行っているように，四元数を大量に用いている．なぜならば，両者とも，その困難な状況において，最小の計算で回転変換をつくり上げることが求められているからである．このような，またその他の実用的な応用を書くことは避けたが，それは Kuipers [29] の最近の本で十二分に扱われている．

我々は，John Baez, Warren Smith, Daniel Allcock, Warren Johnson, そして Mohammed Abouzaid に，本書に関する種々のことがらに対して有益なコメントをいただいたことを感謝する．Derek は，Academic Research Committee at Lafayette College からの夏期研究奨励を通しての財政的な援助に感謝する．Alice and Klaus Peters は，考えうる限りもっとも助けになる出版社であった．Jonathan Peters, Heather Holcombe, Darren Wotherspoon, Ariel Jaffe, そして Susannah Peters に，この本に関する彼らの仕事に対して感謝する．最後に，我々の妻 Barbara と Diana とに，彼女たちの忍耐に対して感謝する．

J. コンウェイ・D. スミス

2002 年 11 月

目　　次

I

複素数
と
その 1, 2 次元幾何への応用

読者は実数については理解しているものと仮定する．複素数とは，形式的には $x_0 + x_1 i$ (x_0, x_1 は実数) という形をしていて，それらの和および積について次式で定義されているものである．

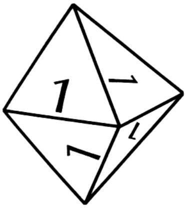
$$(x_0 + x_1 i) + (y_0 + y_1 i) = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)i$$

$$(x_0 + x_1 i)(y_0 + y_1 i) = (x_0 y_0 - x_1 y_1) + (x_0 y_1 + x_1 y_0)i$$

すなわち，それらは

$$i^2 = -1$$

を満たす基本的な単元 i によって生成される実数上の代数を構成する．



序　　論

1.1　実数の代数 $\mathbb{R}$

古代ギリシアそしてその後の幾何学者たちの研究成果により，ユークリッド直線 (Euclidean line) を実数の代数 $\mathbb{R}$ によってパラメトライズすることが習慣化された．このパラメトライズにおいては，a と b との距離はそれらの値の差の絶対値 $|a-b|$ であり，これは $\sqrt{(a-b)^2}$ とも表すことができる．また，$|xy|=|x||y|$ は $\mathbb{R}^1$ の重要な性質の一つである．

$\mathbb{R}^1$ における等距離写像 (isometry)(すなわち距離を保つ写像) には，次の 2 種類がある．

平行移動 (translation)　$x \to k+x$,　**鏡映 (reflection)**　$x \to k-x$

したがって, 1 次元直交群 GO_1 は, 原点を固定するただ二つの等距離写像 $x \to \pm x$ で構成されている．

実数全体 $\mathbb{R}$ は有理数 (rational number) 全体 $\mathbb{Q}$ を含んでいて，特に，整数論の研究対象である (有理) 整数全体 $\mathbb{Z}$ も含んでいる．そして，有理整数においては一意分解定理が成立する．この定理 (本質的には Euclid によって発見された) を伝統的に表現すると，“正整数は (正) 素数の積として，積の順序を無視して一意的に表される” となる．

しかしながら，本書の目的のためには，正という条件を排除して “正または負の整数は，正または負の素数の積として符号と積の順序とを無視して一意的に表される” という表現で述べておくほうがよい．

その伝統的な証明の概要を次に述べよう．それは，任意の整数 n を任意の 0 でない整数 d で割ったときの余り r の絶対値を d よりも小さくすることができる，という事実を本質的に用いている．(実際には，$|r| \le \frac{1}{2}|d|$ ととることができる．図 1.1 をみよ．)

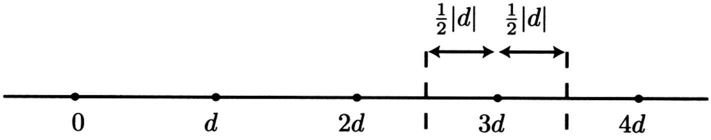


図 1.1　$\mathbb{Z}$ における最大の剰余

$\mathbb{Z}$ の**イデアル (ideal)** とは，$\mathbb{Z}$ の部分集合 $\mathcal{I}$ で次の性質をもつものをいう：

- $0 \in \mathcal{I}$.
- $\mathcal{I}$ の任意の 2 元の和は $\mathcal{I}$ に属する．
- $\mathcal{I}$ の任意の元の任意整数倍は $\mathcal{I}$ に属する．

また，**単項イデアル (principal ideal)** とは，ある整数 g のすべての整数倍で構成されたもののことであり，g を単項イデアルの生成元とよぶ．

このとき，次の補題が成立する．

補題 1. $\mathbb{Z}$ の任意のイデアル $\mathcal{I}$ は単項イデアルである．

証明　$\mathcal{I} = \{0\}$ のとき，これは単項イデアルである．次に $\mathcal{I} \neq \{0\}$ とする．d を $\mathcal{I}$ の 0 でない元で，最小の絶対値を有するものとするとき，$\mathcal{I}$ は d のすべての倍数だけから構成されていることを示す．もしも，$\mathcal{I}$ がそれ以外の整数 n を含んでいたとき，

$$n = qd + r,\quad ただし\ 0 \le r < |d|$$

と書くことができる．n および d はイデアル $\mathcal{I}$ の元であるので，$r = n - qd$ (その絶対値は d のものより小さい) もこのイデアルの元であるが，これは矛盾である．□

これを用いて，次の補題が示せる．

補題 2. p を素数とする．p が二つの整数 a, b の積 ab を割り切るのは，p が a または b の少なくとも一方を割り切るときである．

証明 必要性だけを示せば十分であるので，p が ab を割り切ったと仮定する．$mp + na$ という形 (ただし m, n は整数) をした数全体はイデアルとなるが，それは単項イデアルであるので，その生成元を g とおく．すると (p はこのイデアルの元であるから) g は素数 p の約数，すなわち p もしくは 1 でなければならない．もしも，$g = p$ であるとき，(a はこのイデアルの元であるから) p は a を割り切ることになる．また，$g = 1$ であるときは，ある m, n に対して $1 = mp + na$ となり，$b = mpb + nab$ は (ab が p の倍数であるから) p の倍数となる．□

以上の補題をあわせると，定理が証明できる．もしも，

$$p_1 p_2 \ldots \quad \text{および} \quad q_1 q_2 \ldots$$

が同一の数の二つの素因数分解であったとする．すると，q_1 はいずれかの p_i の約数であることがわかり，したがって p_i そのものに符号を除いて一致するので，それを (順序を入れ換えて) p_1 とする．p_1 をキャンセルした後，q_2 に関しても同様に (順序を入れ換えて) p_2 と符号を除いて一致する．以下同様である．

1.2 高次元

第 1 章のはじめでは，1 次元空間 $\mathbb{R}^1$ とその部分格子である $\mathbb{Z}$ とに関する結果について述べた．本書の目的は，そのような結果をより高い次元に拡張することである．

第 2 章では，2 次元の場合を扱う．そこでは，複素数の代数 $\mathbb{C}$ の言葉で平面幾何を考察する．さらに，そのもっとも有名な二つの極大整環[1)](arithmetic) であるガウス整数 (Gaussian integer) $\mathbb{Z}[i]$ とアイゼンシュタイン整数 (Eisenstein integer) $\mathbb{Z}[\omega]$ とについても述べる．

---

1) [訳注] arithmetic を直訳すると算術であるが，ここでの意味は “極大整環 (maxmal order)” である．

これに類似した議論を 3 次元幾何に対して行うには，4 次元代数である**四元数** (**quaternion**) が必要とされることは，特筆すべき事実である．この事実が，本章の後半で Baez が物語る有名な物語に語られているとおり，四元数の発見を困難なものにしている．

第 3 章では，四元数体 $\mathbb{H}$ を定義し，それらを用いて，3 次元の等長変換 (isometry) の有限群を列挙する．第 4 章では，4 次元空間でも同様に四元数が有益であることを示すが，それはもちろん，四元数としては自然なことである．

これに続くいくつかの章においては，章と次元との関係は崩れている．第 5 章では，四元数が "整数" であるとはどのような意味であるかを議論する．そして，Hurwitz のシステム (フルビッツ整数 (Hurwitzian integer)) は一意分解性をもつことを示すが，そのことが，より単純な Lipschitz のシステム (リプシッツ整数 (Lipschitzian integer)) よりも好まれる理由である．

四元数のような性質をもった他の代数には，どのようなものがあるだろうか．その，もっとも重要な性質 $[xy] = [x][y]$ は "組成代数 (composition algebra)" を定義するものである．第 6 章では，組成代数はよく知られた 1, 2, 4, 8 次元のものだけである，という Hurwitz の有名な結果を証明する．**八元数** (**octonion**) がつくる 8 次元組成代数 $\mathbb{O}$ は結合的ではないが，モゥファン法則 (Moufang law) を満たし，それは結合性に代わる非常におもしろいものである．第 7 章では，モゥファン法則がどのように対称性の条件[2]としてみなされるかを説明する．

第 8 章では，第 4 章の類似として，八元数と 8 次元幾何とについて議論を行う．PSO_8 がもつ，Cartan のすばらしい "トリアリティ (triality)" について議論をし，それを用いて "7 乗算定理" を証明する．

第 9 章では，第 5 章の進め方と同様に，八元数の整数性の正しい定義を探り，その正しい因数分解の理論を打ち立てる．それに続く二つの章では，八元整数の自己同型写像について詳細に調べる．第 10 章では単元について探り，第 11 章では 2 を法として考察することでさらなる情報がどのように得られるかについて示す．

最後の第 12 章では，もっとも興味のある射影平面を八元数を用いて構成する．

---

[2] ［訳注］ モノトピーが推移的であるための条件．

1.3 直交群

n 次元**一般直交群** (***G*eneral *O*rthogonal group**) GO_n とは，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の原点を固定する等長変換がなす群のことである．次の補題は，GO_n が鏡映 (reflection) で生成されることを意味している．

補題 3. ある k 次元部分空間を固定する GO_n の任意の元 α は，高々 $n-k$ 個の鏡映の積として書ける．

証明 α によって固定されない任意のベクトル v を選び，$w=\alpha(v)$ とおく．そのとき，$v-w$ 方向の鏡映 (図 1.2) は，α で動かない任意のベクトル u を固定したまま，w を v に戻す ($[u,v]=[u,w]$ であるから，$v-w$ は u に直交している) [3]．

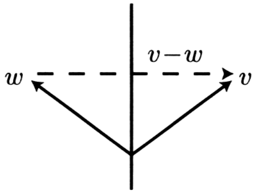


図 1.2 $v-w$ 方向の鏡映

読者は行列式 (determinant) について良く知っているものとする．鏡映の行列式は -1 であるから，GO_n の任意の元の行列式は ± 1 であり，行列式が $+1$ である元の全体は，指数 2 の部分群をなす．この部分群を**特殊直交群** (***S*pecial *O*rthogonal group**) とよび，SO_n と書く．二つの鏡映 r と s との積は，平面 $\langle r,s\rangle$ に直交する $n-2$ 次元空間を固定し，平面 $\langle r,s\rangle$ をある角度だけ回転させる単純回転となる．鏡映を 2 個ずつ組にすることにより，SO_n は単純回転で生成されることがわかる．

最後に，GO_n および SO_n において，α と $-\alpha$ との違いを無視することにより，**射影的一般直交群** (***P*rojective *G*eneral *O*rthogonal group**) PGO_n および**射影的特殊直交群** (***P*rojective *S*pecial *O*rthogonal group**) PSO_n

[3] ［訳注］ α とこの鏡映との合成写像を考えれば，それはもとの k 次元部分空間と v とで張られる $k+1$ 次元部分空間を固定する．この議論を続ければ，高々 $n-k$ 個の鏡映を α に合成すれば，それは恒等写像となる．したがって，α はこれらの鏡映を逆順に合成したものに等しい．

を得る．これら 4 個の群 GO_n, SO_n, PGO_n そして PSO_n の間の関係は，次元の遇奇性に依存しており，これについては，第 3 章，第 4 章で論ずる．

ここで，SO_2 と PSO_2 とが可換群であることは複素数が存在することからの帰結であり，$PSO_4 \cong PSO_3 \times PSO_3$ であることは四元数が存在することからの帰結であり，PSO_8 が位数 3 の “トリアリティ (triality)” 自己同型をもつことは八元数が存在することからの帰結である．

1.4 四元数および八元数の歴史

本書を執筆するにあたって，この章に，それらの歴史について独自の記述を書こうと計画をしていた．時間がなくてそれはかなわなかったが，幸いなことに John Baez [5] によって救われた．彼の許しを得て，彼の論文 “The Octonions” をここに引用することにする．

> ほとんどの数学者は，Hamilton がいかにして四元数を発見したか，についての物語を聞いたことがあるだろう．彼は，30 歳であった 1835 年に，実数のペアとしての複素数をどのように扱うべきかについての発見をした．$\mathbb{C}$ と 2 次元幾何との関係に魅了された彼は，3 次元幾何において同様の役割をする，より大きな代数を作り上げようと長年にわたって試みた．現代的な表現でいえば，彼は 3 次元のノルム多元体 (normed division algebra) を探していたようだ．彼の探究は，1843 年 10 月にそのクライマックスをむかえた．後年，彼は彼の息子に次のように書いている．“その月の上旬の毎朝，私が朝食に降りて行くと，お前の (そのときは) 小さかった弟 William Edwin とお前とが,「ねえパパ，三つ組み達 (triplets) を**かける**ことができた？」と私に問いかけたものだった．しかし，いつも私は悲しく首を振り，「いや，できたのは**足し算**と引き算だけだよ」と答えざるをえなかった．” 問題は，もちろん，3 次元ノルム多元体などは存在しなかったことにあった．彼が本当に必要としたものは，四次元代数だったのである．
>
> 最終的に，1843 年 10 月 16 日，ダブリンでのロイヤル・アイリッシュ・アカデミーの会合へ向かう途中，彼の妻とともにロイヤル運河のほとりを

歩いているときに，彼は重要な発見をした.「つまり，そのとき，そこで，私は思考の電気回路がつながったことを感じ，そして，それから落ちた火花が i, j, k の間の**基本関係式**であった．それは**まさに**，私がそれ以来ずっと使ってきたものである.」そして，有名な数学的破壊行為として，彼はそれらの関係式をブルグハム橋の石に刻み込んだ.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

この物語がこれほど有名である一つの理由には，Hamilton が彼の残りの人生を，四元数とそれの幾何への応用とに取りつかれ，また悩まされることで費やしてしまったことがあるのかもしれない ([21], [24])．そしてしばらくの間，四元数は流行となった．ダブリンにおいては義務的な入試題目となり，アメリカのいくつかの大学においては，高等数学として教えられる唯一のものとさえなった．現在ではスカラーと $\mathbb{R}^3$ のベクトルとを用いてなされることの多くが，その当時，実および虚四元数を用いてなされたのである．Hamilton の死後，エディンバラの Peter Tait やハーバードの Benjamin Peirce たちによって，“四元数論者 (quaternionists)” の学校が発展した．Tait は 8 冊の四元数に関する本を執筆し，それの物理学への応用を強調した．Gibbs が点乗積やクロス乗積の現代的記法を発明したとき，Tait は，それを “両性具有の奇怪なも” のと非難した．論争が引き起こされ，Kelvin や Heaviside のような指導的人物によって四元数に対して散々な非難がなされた．最終的に，四元数が敗れ，そして，決して完全には回復することのできない不名誉の汚点をきせられたのだ [12].

Hamilton の大学からの友人である John T. Graves による八元数の発見は，広く知られてはいない．初期の段階において，Hamilton に複素数と三つ組とを考えるに至らせたのは，Graves が代数において示していた興味であったのだ．まさにその日，その運命的な散歩の後，Hamilton は四元数について書いた 8 ページの手紙を Graves に送った．Graves は 10 月 26 日に返事を書いて，その大胆なアイデアに敬意を表しながら，しかし次のようにつけ加えた.「しかし，そのシステムには，依然として私を当惑させる何かがあります．随意任意に虚数部分を創造し超自然的な性質を授ける，そのような拡張については，私はいまだ明確な見解をもっていません.」そ

してさらに，次のように問うたのだ．「あなたの錬金術をもって3ポンドの金を作ることができるのならば，なぜそこで止まるのでしょうか？」

Graves は彼自身の金のために仕事にとりかかった！ 12 月 26 日，彼は "八元代数 (octaves)" と名づけた新しい 8 次元代数を記述した手紙を Hamilton に送った．彼はそれがノルム多元体であることを示し，それを用いて，8 個の完全平方数を加えた和の二つの積を 8 個の完全平方数の和で表した (8 平方数定理)[23].

1844 年 1 月, Graves は彼の発見を拡張した内容の 3 通の手紙を Hamilton に送った．彼は " 2^m 元体 (2^m-ions) " の一般理論のアイデアについて考察し，16 次元ノルム多元体の構成を試みたが，しかし，彼は "予期しない困難" に遭遇し，それが可能であることに疑いをもちはじめた．Hamilton は Graves の発見を出版することを申し出たが，四元数の仕事で忙しかったため, 彼は延期していた．7 月になって, 彼は Graves に八元数は結合律を満たさないことを指摘し,「四元数 A, B, C に対しては $A{\cdot}BC = AB{\cdot}C = ABC$ が成立するが，あなたの八元数に対しては同様のことが成立しない」と，書き送った．実際，Hamilton がこのとき初めて "結合 (associative)" という用語を発明したので，八元数がこの概念の重要性を明らかにする役目を果たしたわけである．

そうこうしている間, ケンブリッジ大学を出たばかりの若い Arthur Cayley は，Hamilton が四元数の存在を公表して以来，それについて考え続けていた．彼は, 四元数と超楕円関数との関係を探っていたようだ．1845 年 3 月，彼は *Philosophical Magazine* において "On Jacobi's Elliptic Functions, in Reply to the Rev. B. Bronwin; and on Quaternions" [9] というタイトルの論文を出版した．その論文の大部分は，楕円関数に関する Cayley の仕事の間違いを指摘する論説に対する反駁を試みたものであった．みたところ結果論としては，彼は八元数についての短い記述をつなぎ合わせていた．実際には，この論文は間違いにあふれていて，八元数に関する部分を除いて，彼の業績集から外されたほどである．

出版を先んじられて動揺した Graves は，同じジャーナルの後刷に載せた彼自身の論文の後記に，彼は 1843 年のクリスマスには八元数を知ってい

たとつけ加えた．1847 年 6 月 14 日，Hamilton は “Transactions of the Royal Irish Academy” に短い手記を投稿して，Graves の主張を保証した．しかし，時は遅すぎ，八元数は “ケイリー数 (Cayley number)” として知られることとなった．さらに悪いことに，Graves は後になって，彼の 8 平方数定理は C. F. Degen によって 1818 年にすでに発見されていたことを知ったのだ ([13], [14])．

四元数に比較して，なぜ八元数には世にも知られず不活発であったのであろうか．その不名誉な出生以外にも，Hamilton のような疲れを知らない擁護者が不足していたということも理由の一つであろう．しかし，**その**確かな理由は，幾何学や物理学への明らかな応用がなかったことである．四元数の単元全体は群 SU_2 (それは回転群 SO_3 の 2 重被覆である) をなす．このことは，回転や角運動量などを，特に量子力学の文脈において研究するために，うまく適合したものであった．今日では，これらの現象はクリフォード代数 (Clifford algebra) の理論の特殊な場合としてみなされている．我々のほとんどは，Hamilton がそれらのために主張した宇宙的な重要性が四元数のものであるとはもはや考えないが，しかし，我々が物事のあるべき姿を理解するためには，それらはとてもうまく適用できる．一方，八元数はそうではないのだ．

八元数の “宇宙的な重要性” を理解する試みが，本書に至ったのである！Baez による上記の短い歴史によると，Hamilton が本当に初めて四元数を構成したようにみえるが，それ以前にも，1748 年の Euler の 4 平方数恒等式 (それは，事実，四元数を定義している) の発見に始まる歴史があった．また，O. Rodrigues は，業績が最高潮に達した 1840 年のすばらしい論文によって，事実，対応する四元数の座標である 4 個のパラメタ (よく，オイラー・ロドリゲスのパラメタと誤ったよばれ方をする) によって，一般回転をパラメトライズしている．彼が与えた回転における積の規則は，1843 年に Hamilton が与えた四元数の積の公式と同じものであったことから，彼は Hamilton の先駆者とされた．Rodrigues の仕事の全体の記述については，S. Altmann の *Rotations, Quaternions, and Double Groups* [3] を参照されたい．

本書に関連した，さらに後におけるもっとも重要な寄与は，Hurwitz による組成代数の特徴づけ [26]，Dickson の二重化法則 (doubling rule) と "整数性 (integrality)" とに関する議論，そして，Coxeter の幾何的な研究 [11]，そして，Rankin の算術的な整数的八元数 (integral octonions，八元整数) O の研究 [36] などがある．ここでも，他の所でも，本書では参考文献と歴史的注釈とは非常に少ないものしか与えていない．興味をもたれた読者は，

`http://www.akpeters.com/QANDO`

を調べてみることをすすめる．このサイトでは，追加の参考文献と Baez の論文のオンラインバージョンへのリンクとが載せられている．

2

複素数と2次元幾何

読者は複素代数についてよく知っているものと仮定する．本章では，四元数と八元数とを高次元のユークリッド空間へ応用するための前奏として，複素数とユークリッド平面の幾何との関係に焦点をあてる．また，もっとも興味深い複素数の二つの部分環である，ガウス整数環とアイゼンシュタイン整数環とに関しても考察する．

2.1 回転と鏡映

複素数の幾何的性質は，それらがユークリッドノルム

$$N(x+iy)=x^2+y^2$$

に関して組成代数を構成する，すなわち

$$N(z_1z_2)=N(z_1)N(z_2)$$

が成り立つという事実から導かれる．このことは，固定した (非零の) 複素数 z_0 をかけることは，すべての長さを $\sqrt{N(z_0)}$ 倍すること，すなわちユークリッド幾何的な相似変換になることを意味する (図 2.1).

$N(z_0)=1$ という重要な場合，$z\to z_0z$ はユークリッド幾何的な合同変換，すなわち**等長変換 (isometry)** となる．さらに，そのような単元 z_0 は，単元上だけを通る道で 1 から連続的に到達可能であり (図 2.2)，したがって，この合同変換は恒等写像からの連続的な動きによって得られる．このような合同変換は，**回転 (rotation)** とよばれる．

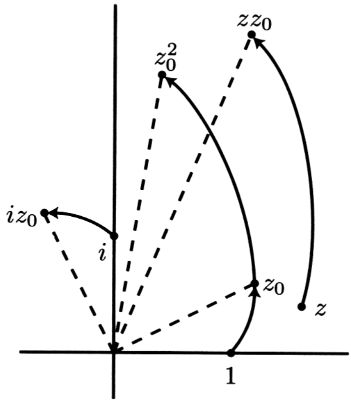


図 2.1　ユークリッド相似変換 $z \to zz_0$

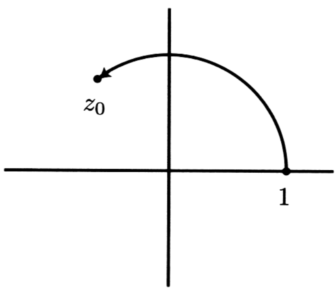


図 2.2　ユークリッド合同変換は恒等写像からの連続的変形で実現可能

回転の標準的な公式

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

は，積の式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

と三角関数の定義とから直ちに導かれる (図 2.3 をみよ).

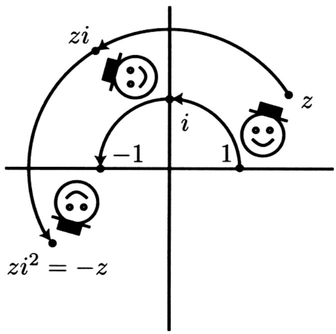


図 2.3　ユークリッド回転変換 $z \to zi$

しかし，**鏡映 (reflection)** は他の種類のユークリッド幾何的合同変換であり，

$$x' = x,$$

$$y' = -y$$

で例示され，それは複素共役

$$\overline{x + iy} = x - iy$$

と対応する．

そこで，次の定理が得られる．

定理 1. u を複素単元とするとき，写像 $z \to uz$ は回転であり，$z \to u\overline{z}$ は鏡映である．

これら二つの写像の行列は，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ あるいは } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

である．これらの行列式は 1 あるいは -1 であり，それぞれ SO_2 あるいは $GO_2 \backslash SO_2$ に属していることを示している．

さらに，2 次元直交群 GO_2 の任意の元 (a_{ij}) はこれら二つのタイプのどちらか一方である．直交行列としての最初の条件 $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ は，ある θ に対して $a_{11} = \cos\theta$, $a_{12} = \sin\theta$ であることを意味し，そして残りの条件は $a_{21} = \mp\sin\theta$, $a_{22} = \pm\cos\theta$ を意味する．

これで，2 次元直交群が何であるかが明らかになった．

定理 2. SO_2 はすべての複素単元の積による写像 $z \to uz$ からできていて，GO_2 はこれらに加えて $z \to u\bar{z}$ という写像からできている．

このことは，2π を法とした実角度 θ のなす円周としての，SO_2 の位相的同定を与える．すなわち，GO_2 は 2 個の成分をもっていて，各々は円周である．

2.2 GO_2 および SO_2 の有限部分群

SO_2 の与えられた有限部分群 G に対して，それに属する回転の角度の中で，最小の正の角度 θ について考えよう．すると，θ は $\frac{2\pi}{m}$ (m は整数) と表される．なぜならば，$m\theta \geq 2\pi$ であるような最小の正整数を m とするとき，$m\theta = 2\pi$ となるからである．もしもそうでなければ，$m\theta = 2\pi + \theta'$ とおくとき $0 < \theta' < \theta$ となり，θ の最小性に反することになる[1)]．

さらに，G はこの $\frac{2\pi}{m}$ 回転で生成される．なぜならば，$\frac{2\pi}{m}$ 回転で生成されない回転 θ を G が含んでいたとすると，θ は $\frac{2\pi}{m}$ の整数倍と $\frac{2\pi}{m}$ よりも真に小さい正の “剰余角” ϕ との和で書くことができ，$\frac{2\pi}{m}$ が G に属す回転の角度の最小値であることに反するからである．これが回転群もしくはキラル点群であり，“軌道体記法” では $m\bullet$ と書き表す (補遺を参照)．

以上で，次のことを示すことができた．

定理 3. SO_2 の一般の有限部分群は $m\bullet$ であり，これは $\frac{2\pi}{m}$ の倍数角度の回転からなる．

SO_2 の部分群は**キラル** (**chiral**)(“片手型”) とよばれる．なぜなら，それらは 2 次元の物体の左手型および右手型を保存するからである (図 2.4 を参照)．これに対して，GO_2 の部分群で SO_2 に含まれないものは，手型を反転しうるので**アキラル** (**achiral**) (“非手型”) とよばれる (図 2.5 参照)．

---

1) ［訳注］ θ' は G に属する回転の角度である．

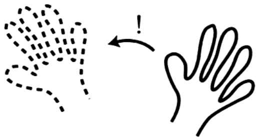


図 2.4　2 次元のキラル性



図 2.5　2 次元のアキラル性

原点を通る任意の直線に関する鏡映を付け加えることで，鏡映群すなわちアキラル点群を得る．軌道体記法では，これを $*m\bullet$ で表す．次のことは，もはや簡単にわかるであろう．

定理 4.　GO_2 の一般の有限部分群は $*m\bullet$ である．

(それの指数 2 のキラル部分群は，ある m についての $m\bullet$ でなければならないから)．

2.3　ガウス整数

Gauss は，実数の整数性に類似した概念を複素数に対しても定義した．すなわち，複素数 $x + iy$ が**ガウス整数** (**Gaussian integer**) であるのは，実数部分と虚数部分とが任意の整数であるときと定めた．二つのガウス整数の和，差，積がまたガウス整数となることより，ガウス整数全体は環をなす．

幾何的には，ガウス整数は正方格子をなし (図 2.6)，もっとも近い 2 点の差は，ガウス単元 4 個 1, -1, i, $-i$ のいずれかである．

おそらく，ガウス整数のもっとも興味深い性質は，その一意分解性定理であろう．

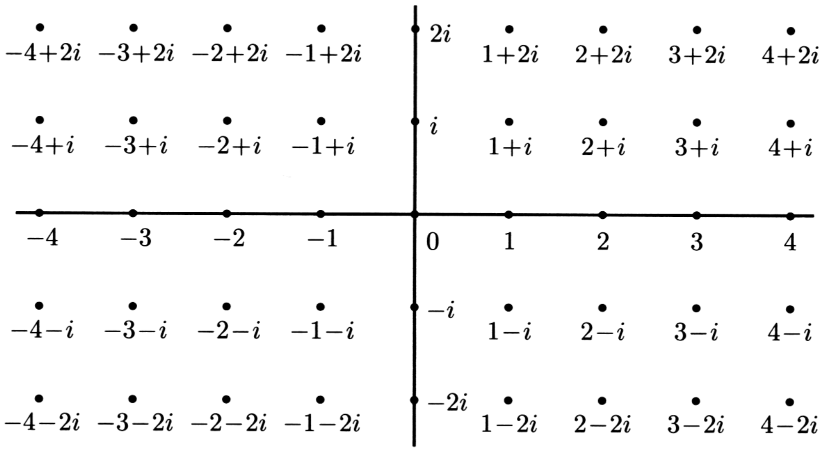


図 2.6 ガウス整数

定理 5. 任意の零でなく単元でもないガウス整数は，ガウス素数への分解 $\pi_1\pi_2\dots\pi_k$ をもつ．このような任意の分解から，他の任意の分解が，次の操作により得られる．

- 素数の並び替え
- 単元転移 (unit-migration)： $\pi_s, \pi_{s+1} \to \pi_s u, \overline{u}\pi_{s+1}$

ここで，**ガウス素数 (Gaussian prime)** とは，そのノルムが通常の素数であるようなガウス整数であり，したがって，それを 2 個のガウス整数の積に分解すればちょうど一つの因子が単元になる．

第 1 章で通常の整数に関する一意分解性定理を証明した際，ある数を別の数で割ったときより小さい剰余を得る，という事実のみを使った．実際は，もしも負の剰余も許すのであれば，割る数 d の倍数から $\frac{1}{2}|d|$ の範囲内に割られる数をみつけることができる (図 1.1 を参照．ここで，$|d|$ は 0 と d との距離である)．

図 2.7 は，任意のガウス整数が，あるガウス整数 d の倍数から $|d|/\sqrt{2}$ の範囲内にある，ということを示している．$1/\sqrt{2}$ は 1 よりも小さいから，剰余は割る数の大きさよりも小さく，したがって，一意分解性の証明はガウス整数に対しても働く．

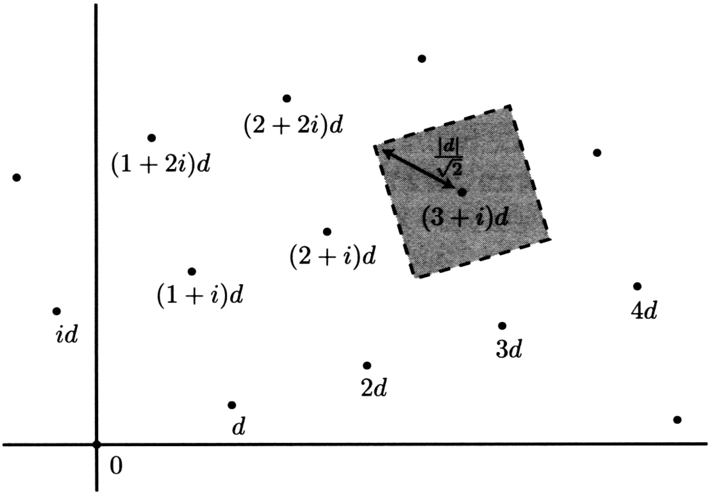


図 2.7　ガウス整数の最大剰余

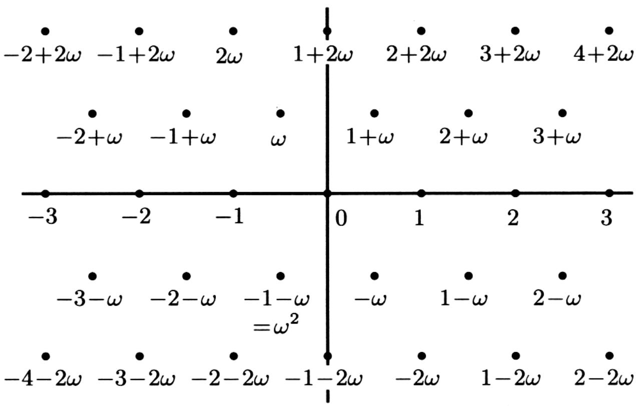


図 2.8　アイゼンシュタイン整数

ガウス整数の単元は，1 の 4 乗根である．ガウスの弟子である Eisenstein は，1 の 3 乗根と 6 乗根とを含む，それに代わるシステムを与えた．**アイゼンシュタイン整数 (Eisenstein integer)** は，$a + b\omega$ という形 (a, b は有理整数) をした数である．ここで，$\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ は $x^3 = 1$ の一つの解であり，他の二つは，1 と $\omega^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ とである．アイゼンシュタイン整数は三角格子をなす (図 2.8)．図 2.9 は図 2.7 に似ており，任意のアイゼンシュタイン整数は，与えられたアイゼンシュタイン整数 d のある整数倍から $\frac{1}{\sqrt{3}}|d|$ の距離以内にあることを示している．そして，それはアイゼンシュタイン整数もまた一意素因数分解性をもっていることを示している．

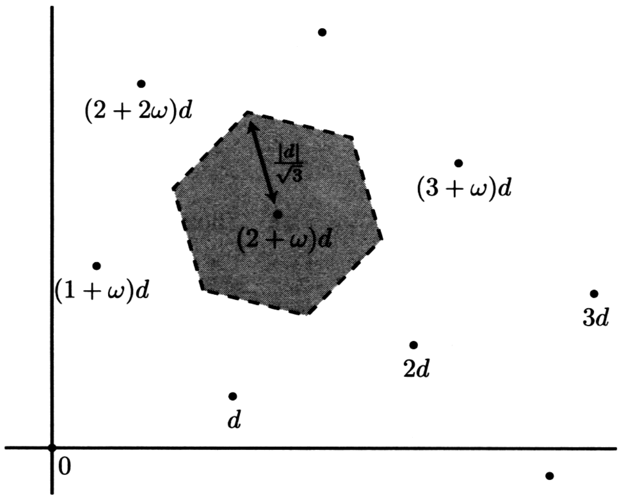


図 2.9　アイゼンシュタイン整数の最大剰余

2.4 クライン整数

一意分解性をもつ虚 2 次体は 9 個のみ，すなわちその判別式が

$$3,\quad 4,\quad 7,\quad 8,\quad 11,\quad 19,\quad 43,\quad 67,\quad 163$$

であるものに限られるという有名な定理は，Heegner によって証明され，A. Baker と H.M. Stark とによって独立に再構築された．

アイゼンシュタイン整数 (判別式 3) とガウス整数 (判別式 4) とに続いてもっとも簡単な環は，"**クライン環 (Kleinian ring)**" とよばれているものであり，それは $a+b\lambda$ $(a,b\in\mathbb{Z},\ \lambda=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2})$ という形の数からなっている (図 2.10). この環のもっとも重要な特徴は，ただ二つの単元 ±1 をもち，2 が $\lambda\mu$ と分解されることである (ここで，$\mu=\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$).

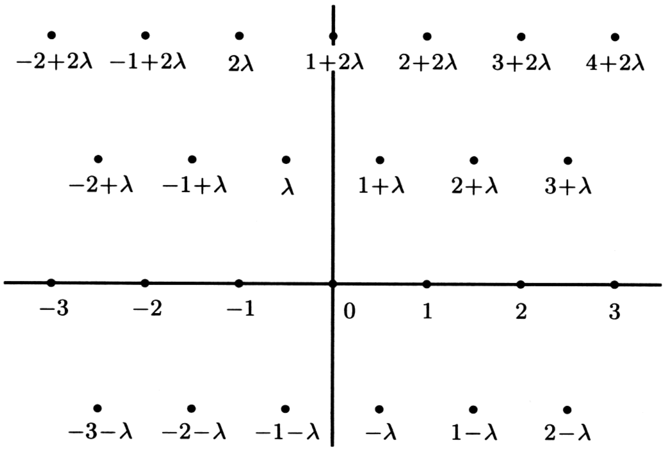


図 2.10　クライン環

2.5 2 次元空間群

この章の本論の中で，我々はすでに 2 次元点群について議論を行ってきた．ここで，17 個の 2 次元空間群について簡潔に記述しておく．なぜなら，それらの理論は次章での 3 次元点群と密接な関係にあるからである．

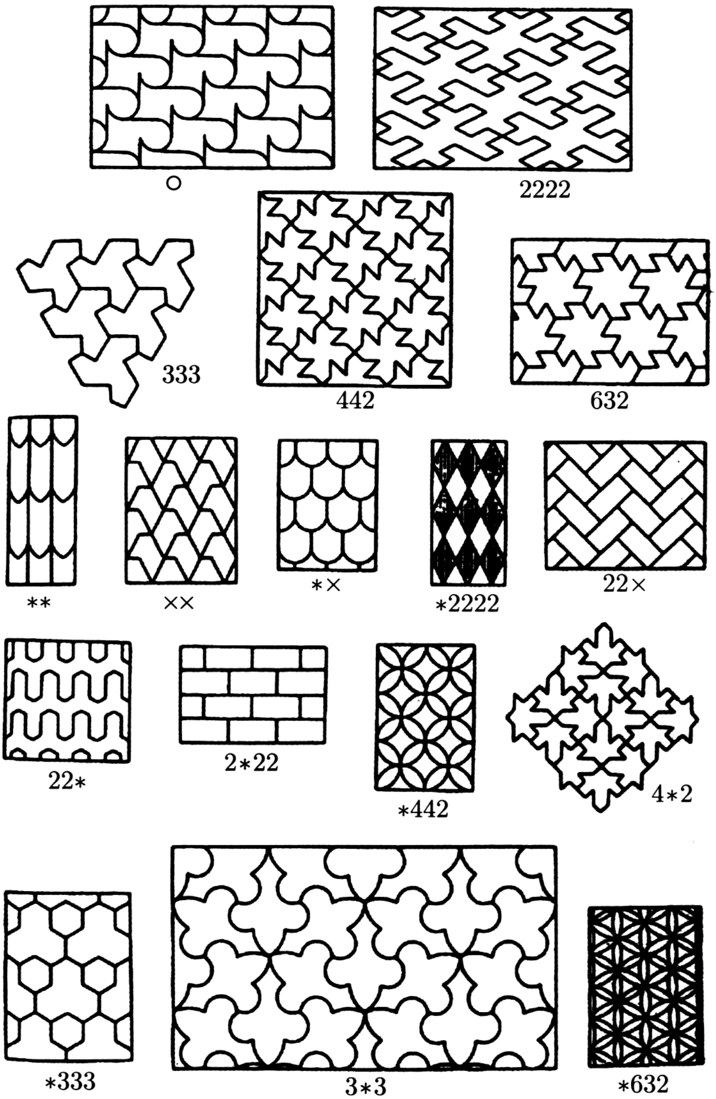


図 2.11　これは 1924 年に G. Pólya が描いた 17 個の異なる平面対称群を表す図を複製したものであり，彼が命名した名前を軌道体名で置き換えている．

軌道体記法においては，17 個の群は

$$*632,\ 632$$
$$*442,\ 4*2,\ 442$$
$$*333,\ 3*3,\ 333$$
$$*2222,\ 2*22,\ 22*,\ 22\times,\ 2222$$
$$**,\ *\times,\ \times\times,\ \circ$$

となる．ここで，

- $*$ に続かない数字 $A \geq 2$ は局所対称性 $A\bullet$ をもつ点のタイプを表している．
- $*$ に引き続く数字の列 $a_1 \geq 2,\ a_2 \geq 2,\ \ldots,\ a_k \geq 2$ は，万華鏡のタイプ，すなわち，局所対称性 $*a_1\bullet,\ *a_2\bullet,\ \ldots,\ *a_k\bullet$ の異なるタイプの点を結ぶ鏡の線のシステムを表している．
- $\times$ は "ミラクル (miracle)"，すなわち，鏡と交わらなくて向きを反転させる道の存在を表している．
- $\circ$ は "ワンダー (wonder)"，すなわち，まだ説明はされていない主模様の繰り返しを表している．

(ここでは，これ以上の詳しい定義は行わない．)

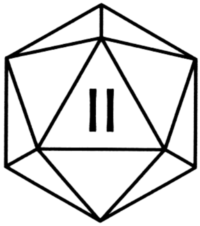
これらの記号はそれぞれある特有のコストをもっている．

記号	コスト
A	$(A-1)/A$
$*$	1
$*$ の後の a_i	$(a_i-1)/2a_i$
$\times$	1
$\circ$	2

そして，"Magic Theorem" は，上記の 17 種類のものは，それぞれちょうど 2 の総コストをもっているということを主張する (図 2.11 参照).

この Magic Theorem の証明は，これらの名前と，平面を群で割って得られる**軌道体 (orbifold)** の特徴との関連づけを与える．その解釈法によると，$*a_1a_2\ldots a_k$ は角度が $\frac{\pi}{a_1}$, $\frac{\pi}{a_2}$, ..., $\frac{\pi}{a_k}$ であるような k 個の角がある境界を表し，$*$ に続かない A は角度 $\frac{2\pi}{A}$ の錐点を表し，$\times$ はクロスカップを，そして $\circ$ はハンドルを表す[2)]．

[2)] ［訳注］ 位相幾何的には，クロスカップは 2 次元実射影平面から開円盤を除いたものであり，ハンドルは 2 次元トーラスから開円盤を除いたものである．



四元数と その 3, 4 次元幾何への応用

四元数とは，形式的な表現 $x_0+x_1i+x_2j+x_3k$ (x_0, x_1, x_2, x_3 は実数) に，次によって和と積とが与えられたもののことである．

$$(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)+(y_0+y_1i+y_2j+y_3k)$$
$$=(x_0+y_0)+(x_1+y_1)i+(x_2+y_2)j+(x_3+y_3)k$$

$$\begin{aligned}(x_0+x_1i+x_2j+x_3k)&(y_0+y_1i+y_2j+y_3k)\\ &=(x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)\\ &+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)i\\ &+(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1)j\\ &+(x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0)k\end{aligned}$$

すなわち，それらは基本的単元 i, j, k で生成された実数上の代数を構成し，i, j, k は次の有名なハミルトンの等式

$$ij=k \qquad jk=i \qquad ki=j$$
$$ji=-k \qquad kj=-i \qquad ik=-j$$
$$i^2=j^2=k^2=-1$$

を満たす．



四元数と3次元群

前章では，SO_2 および GO_2 の有限部分群を列挙し，それらを複素数と関係づけた．本章の目的は，SO_3 および GO_3 の有限部分群を列挙し，それらを四元数と関係づけることである．

3.1 四元数と3次元回転

四元数と3次元幾何との間の関係とは何であろうか．結局のところ，それは四元数の積のノルムがそれらのノルムの積になるという事実からきている．すなわち

$$N(q_1vq_2) = N(q_1)N(v)N(q_2)$$

は，写像 $v \to q_1vq_2$ が，ユークリッド4次元空間の長さを $\sqrt{N(q_1)N(q_2)}$ 倍にする相似変換であり，さらに $N(q_1)N(q_2) = 1$ であるならば，これは合同変換であることを示している，ということである．もしもこの写像が $v = 1$ を固定するならば，それは，1に垂直な3次元空間を集合として固定[1]する．この空間の元は $xi + yj + zk$ という形の (すなわち "実部分" がない) ベクトルであり，以後これを (3次元) **ベクトル**[2]とよぶことにする．$v = 1$ を固定するための条件は $q_1q_2 = 1$ であるので，次を得る．

---

[1] ［訳注］ 原著では fix(固定する) という言葉を，setwise(集合として) か pointwise(各点ごとに) かの明記をしないまま用いているので，適宜，補足している．

[2] ［訳注］ 以後，ユークリッド3次元空間といえば，このベクトルのなす空間を意味することとする．

定理 1. 写像 $[q] : v \to q^{-1}vq$ はユークリッド 3 次元空間の合同写像である.

実際，この合同写像は**単純回転**であり，すなわち，それは一つのベクトルを固定する (n 次元においては，単純回転はある $(n-2)$ 次元空間を各点ごとに固定する). さらに正確には，u がユークリッド 3 次元空間内の単位ベクトルであり，$q = r(\cos\theta + u\sin\theta)$ であるとき，$[q]$ は u を軸とする角度 2θ の回転となることを，この章の補遺で示す.

任意の単純回転は (u と θ とを適当に選ぶことで) この形に書けることに注意することにより，次の定理の直接的な証明が得られる.

定理 2. (回転に関するオイラーの定理 (Euler's Theorem on Rotations)) 任意の二つの単純回転の積は，単純回転である.

二つの単純回転

$$x \to q_1^{-1}xq_1 , \quad x \to q_2^{-1}xq_2$$

の積は $x \to (q_1q_2)^{-1}x(q_1q_2)$ であり，これはまた単純回転である. 次の章では，このオイラーの定理の幾何的な証明を与える.

第 1 章で，特殊直交群は単純回転で生成されることを示しているから，ここで，次の定理が得られたことになる.

定理 3. SO_3 の任意の元は，ある四元数 q を用いて $x \to q^{-1}xq$ と表され，そしてこれは単純回転である.

最初に，与えられた四元数に零でないスカラーをかけても同一の回転を与えるので，この四元数と回転との間の対応は "∞-対-1" であることが，一見してわかる. しかし，q を単位四元数に限定することにより，この多重性を縮小することができる. q と $-q$ のみが同一の回転を与えることから，2-対-1 の対応にすることができるからである.

定理 4. q を $[q] : x \to q^{-1}xq$ に写す写像は，四元数単元のなす群から SO_3 への 2-対-1 準同型である.

標準的な用語では，四元数単元の集合は SO_3 の 2 重被覆であり，それは**スピン群(spin group) Spin_3** とよばれる．スピン群はすべての次元において存在するが，その一般的な定義をここで行うのは非常に長くなるのでやめておく．他には，Spin_4，Spin_7，Spin_8 の三つのものだけが，後の章で登場する．

ここで議論していることの微妙な点の一つは，異なる 2-対-1 写像がいくつかあることである．本書の記法では，(必要であれば) **角括弧**を用いることにより，これらを明示的にする．すなわち，二つの四元数単元 $+q$, $-q$ が同一の 3 次元等長写像 $[q] : x \to \bar{q}xq$ を定める．さらに，二つの n 次元等長写像 $+g$, $-g$ ($\in GO_n$) が同一の射影的等長写像 $[g] \in PGO_n$ を定める[3]．この二つの写像を q に施した結果を，$[[q]]$ ではなく $[\![q]\!]$ で表すこととする．

この章の残りで，GO_3 の有限部分群 (図 3.1 を参照) とそれらを四元数によって表す方法とについて解説する．続く数節では，最初に SO_3 の有限部分群を列挙する．ある有用な球面幾何から，次節をはじめよう．

3.2 球面幾何

まず，次の定理からはじめる．

定理 5. n 次元ユークリッド空間の等長写像からなる任意の有限群は，ある 1 点を固定する．

$P_1, P_2, \ldots, P_N$ を，任意の 1 点 P_1 の (その有限群の下でのすべての) 像とするとき，$\frac{1}{N}(P_1 + P_2 + \cdots + P_N)$ は明らかに固定される．

そこで，今後，原点を固定する有限群に興味をしぼることとし，それらが単位球面に及ぼす作用に着目して考察しよう．

定理 6. 任意の球面三角形の 3 頂点における頂点角度の 2 倍 (回転方向は図 3.2 に示されている) だけの単純回転の積は，恒等写像である．

---

[3] ［訳注］ この二つの 2-対-1 写像は混同しやすく読者に混乱を招くと思われるので，後者のほうは角括弧をわずかに太くして区別している．

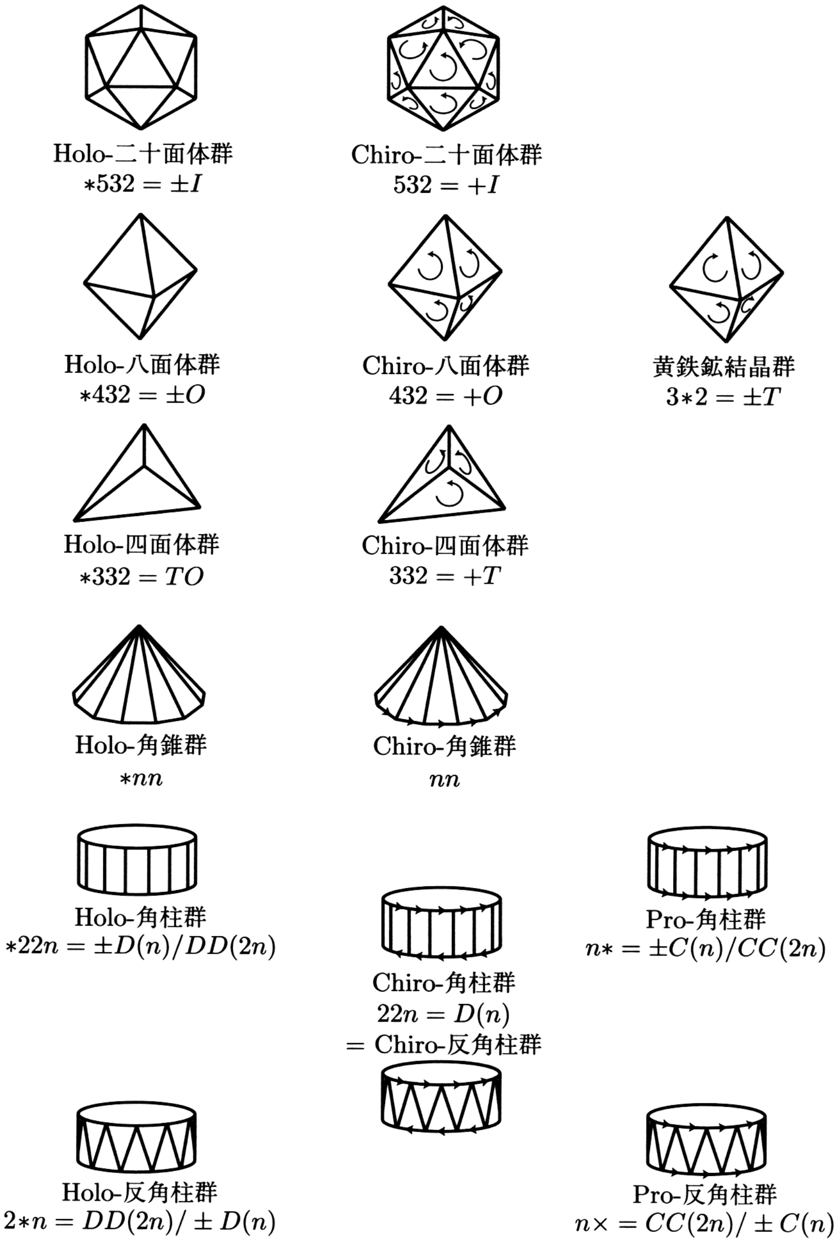


図 3.1　多面体による 3 次元群 (3.9 節も参照)

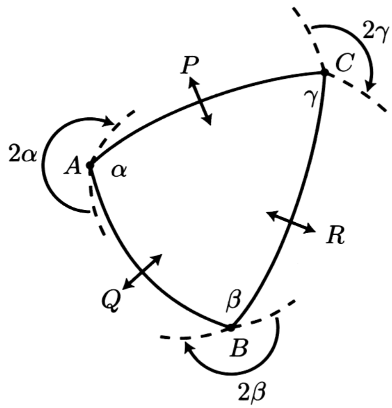


図 3.2 PQ は頂点 A における角度 2α の A 回転であり，QR は頂点 B における角度 2β の回転であり，RP は頂点 C における角度 2γ の回転である．

P, Q, R を三角形の各辺における鏡映とすると，各頂点におけるそれらの回転は PQ, QR, RP となり (ここで，PQ は P に引き続き Q を施すことを意味する)，よって

$$PQ \cdot QR \cdot RP = PQ^2R^2P = PP = 1$$

となる．

特に，任意の二つの回転 A (角度 2α) と B (角度 2β) とに対して，図 3.3 のように "三角形を完成させる" ことができる．このことから，オイラーの回転定理の幾何的な証明が得られる．

よって，単純回転によって生成される群は，全体が単純回転から構成される．これらの**回転群 (rotation groups)** は，これ以降の議論の中でもっとも重要な群である．また，それらがただ二つの回転から生成されるということを後で示す．

鏡映群 (reflection group) とは，鏡映で生成された群のことである．

定理 7. 二つの回転 R_1, R_2 で生成された群は，ある鏡映群の中に指数 2 として含まれる．

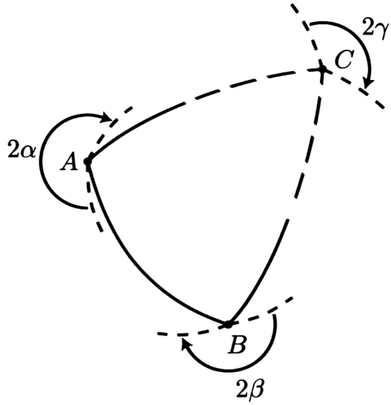


図 3.3 頂点 A での角度 2α の回転と頂点 B での角度 2β の回転との積は，頂点 C での角度 -2γ の回転になり，それらで三角形が完成される．

目的の鏡映群は，R_1, R_2 で生成された回転群に，R_1 および R_2 それぞれの軸を含む平面に関する鏡映 M を付加することにより得られる．$M_1 = MR_1$, $M_2 = MR_2$ とおくとこれらは鏡映であり，$R_1 = MM_1$, $R_2 = MM_2$ であるから，この群は鏡映群である．また，この群のすべての要素は R_1, R_2, M を用いたワード[4)]として表されるが，$R_1M = MR_1$, $R_2M = MR_2$ という関係式を用いることにより，M を先頭にもってくることができ，さらに $M^2 = 1$ を用いると，最終的に w か Mw かいずれかの形になる．ここで，w は R_1 と R_2 とからなるワードである．

定理 8. 任意の有限鏡映群は，頂点の角度がすべて $\frac{\pi}{n}$ という形をしている球面上の凸多角形の各辺における鏡映によって生成される．

この群の各鏡映の固定平面が単位球面を切る様子を考えてみよう．明らかに，それらは球面をいくつかの凸多角形に分割する．また，一つの辺を共有する二つの多角形は，その辺に関する鏡映で互いに移りあう．これは，それらの多角形が同一の形であり，一つの多角形の各辺における鏡映が，その多角形からそ

4) [訳注] ワードとは，群論で用いられる用語であり，生成元の有限列のことである．その列をなす生成元たちは群演算によって結合されているが，結合律によりその演算結果は結合の仕方に依存せず，ただ一つの元を定めることとなる．

の近傍の多角形への対応を生成する，ということを示している．そして，これを繰り返すことにより，群全体が生成される．

軌道体の表記法において，頂点角が $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \ldots, \frac{\pi}{z}$ である多角形の辺における鏡映で生成される群は $*ab\ldots z$ と表される．また一般的な記述を簡略化するために，軌道体表記においては，任意の場所への数 1 の挿入削除を許すこととする．

定理 9. **(球面過剰定理 (The Spherical Excess Theorems))**

$$A+B+C=\pi+\triangle$$
$$A+B+C+D=2\pi+\square$$
$$A+B+C+D+E=3\pi+⬠$$
$$\vdots$$

ここで $\triangle$ ($\square$, ⬠, ...) は，頂点の角度が A, B, C (D, E, ...) である三角形 (四角形，五角形，...) の面積を表す．

証明 図 3.4 は，多角形についての証明を三角形についての証明に帰着できることを示している．また，三角形についての証明は，図 3.5 と図 3.6 とで示されている．□

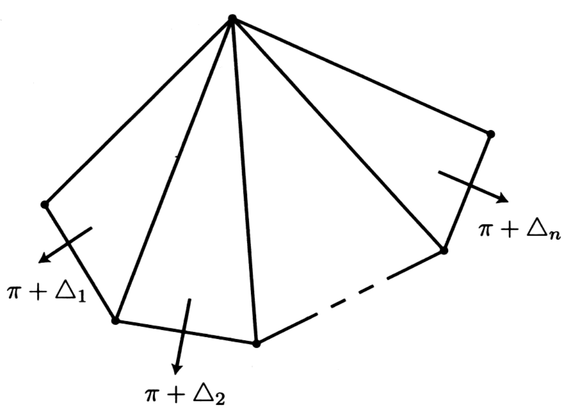


図 3.4 多角形の三角形分割とその角度和

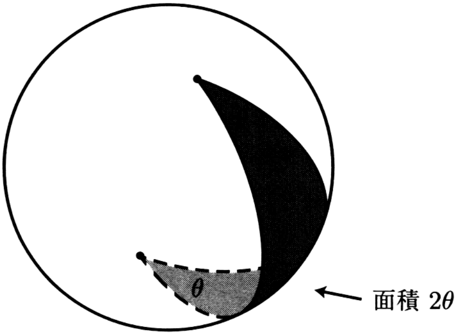


図 3.5　三日月形の面積は明らかにその角度 θ に比例し，球面全体の面積が 4π であることから，その面積は 2θ である．

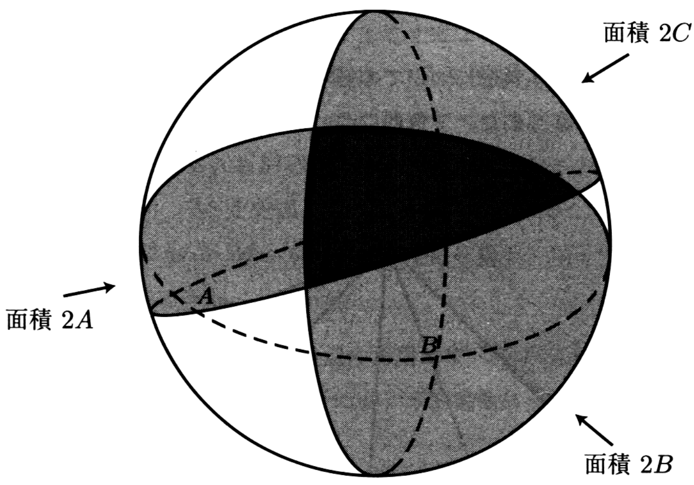


図 3.6　球面 (その面積は 4π) が 8 個の三角形に分割され，そのうちの影が付けられている 4 個の三角形の面積の総和は (反対側の三角形は同じ面積であることから) 2π である．影の付いた 3 個の三日月形の面積和は $2A+2B+2C$ であるが，共通の三角形 (面積 $\triangle$) は 3 度覆われているので，その面積和は $2\pi+2\triangle$ でなければならない．

3.3 回転群の列挙

最初に，鏡映群の列挙をしておこう．それは，すなわち次のようになる．

定理 10. 有限鏡映群は，次のいずれかである：

$$*532 \quad *432 \quad *332 \quad *22n \quad *nn\ (n \geq 1).$$

我々の k 角形の頂点角は $\frac{\pi}{n}$ という形をしているので，その総和は $\frac{k\pi}{2}$ 以下であるが，しかし，前定理よりそれは $(k-2)\pi$ よりも大きくなければならないので，よって $k \leq 3$ となる．

いま，$k=3$ としよう．すると，最大の頂点角は $\frac{\pi}{2}$ であり (そうでなければ，頂点角の和は高々 $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$)，2 番目に大きな頂点角は $\frac{\pi}{2}$ か $\frac{\pi}{3}$ かであり (そうでなければ，頂点角の和は高々 $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi$)，そして最後に，それらが $\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{3}$ とであるとき，残った頂点角は少なくとも $\frac{\pi}{5}$ である (そうでなければ，頂点角の和は高々 $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\pi$)．以上のことより，$*22n, *233, *234, *235$ の場合が得られた．

次に，$k=2$ としよう．このときは，多角形は二つの大円弧でできた弓形であり，それらの二つの頂点角は相等しい．それらが $\frac{\pi}{n}$ であるならば，問題の群は $*nn$ (これは $n=1$ であるときに多角形が半球である場合も含んでいる) である．

本章の礎石は次の定理である．

定理 11. 有限回転群は次のいずれかである：

$$532 \quad 432 \quad 332 \quad 22n \quad nn \quad (n \geq 1).$$

まず最初に，これまでの議論は，高々 2 個の回転で生成される群についてはこれが真であることを示している．

2 個よりも多くの生成元を必要とする有限回転群 G があるのだろうか．いや，そのようなものはない．なぜならば，G の任意の 2 個の回転は定理にある群のいずれかを生成するが，それらにおける回転の中心間の距離には制限があり，新しい回転を付加しようとすると，その中心がそれらの制限を破ることになるからである (図 3.7 をみよ)．

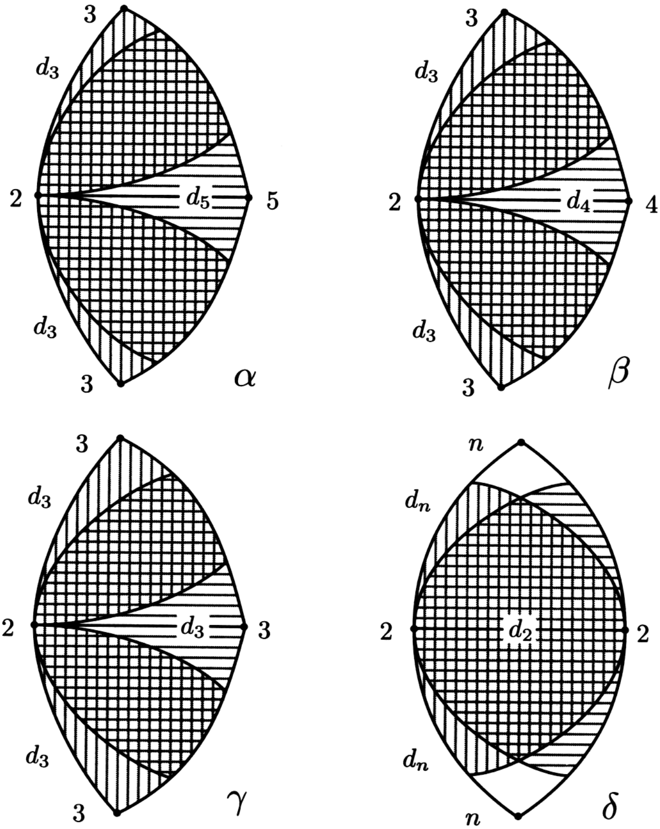


図 3.7　n 重回転の中心を n で表し，d_n をそれらの一つから他の回転中心への最短距離とする．d_5 と d_3 とがとりうる値の最小値は 532 でみられるが，これに新しい回転を付加するとすると，その中心の位置は 2 から d_5 あるいは d_3 の距離以内にあることになるので，G は 532 を含むことはできない (α をみよ)．そうでない場合，d_4 と d_3 の最小値は 432 の中でみられるが，この場合，新しく付加した回転の中心は 2 から d_4 あるいは d_3 の距離内にある，ということから，回転を付加することは不可能である (β をみよ)．d_3 がとりうる値で，その次に小さな値は 332 の中にあり，それに回転を付加することは同様の理由で不可能である (γ をみよ)．残りのすべての場合において，もしも最大位数の回転が n 重 ($n \geq 2$) であるとすると，その回転および他の回転によっては $22n$ を生成することしかできず，$d_n = \frac{\pi}{2}$ と $d_2 = \frac{\pi}{n}$ となり，それは再び，回転の付加を排除することになる (δ をみよ)．

無限に多くの群をみつけたが，上記の“5 個の群”(それらのうちの二つはパラメタに依存する) としてまとめるほうが都合がよい．

3.4 有限回転群について

最初の三つの群は，まとめて**多面体回転群 (polyhedral rotation group)**，とよばれる．なぜなら，それらは適当な正多面体をそれ自身に移す回転からなっているからである．残り二つは，一つの軸を固定することから，**軸性回転群 (axial rotation group)** とよばれる．

図 3.8 をみればわかるように，抽象的には，それらはよく知られた n 個の文字の置換群のある部分群 $G(n)$ に同型である．その個々の場合は次のようになる．

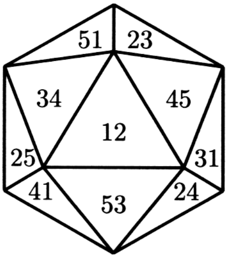
$$532 = I = I_{60} \cong A(5), \quad \text{二十面体 (icosahedral) 群}$$
$$432 = O = O_{24} \cong S(4), \quad \text{八面体 (octahedral) 群}$$
$$332 = T = T_{12} \cong A(4), \quad \text{四面体 (tetrahedral) 群}$$
$$22n = D = D_{2n} \cong D(n), \quad \text{二面体 (dihedral) 群}$$
$$nn = C = C_n \cong C(n), \quad \text{巡回 (cyclic) 群}$$

これらは，伝統的ではあるけれども，かなり紛らわしい名前である．我々は“chiro-”をこれらの前につけて，“holo-多面体”群 (これらは適当な多面体のすべての対称性に関する対称群である) から区別する[5]．

幾何学者はパラメタ n を用いて名前を表すのを好むが，群論の専門家は普通 D_{2n} と書いて位数 $2n$ の二面体群を表すので，名前の付け方に関して少しの混乱がある．群論の専門家でもある幾何学者として，我々は時に D_{2n} と書き表したり，また時には $D(n)$ と書いたりする．

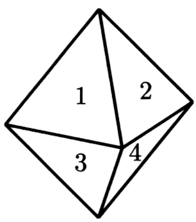
---

[5] ［訳注］ “chiro-”は“片手の”という意味の接頭語であり，ここではキラルという意味を表している．すなわち，chiro-多面体群は回転のみによる多面体の対称性の群であり，鏡映は含まない．“holo-”は“すべての”という意味の接頭語であり，holo-多面体群は多面体のすべての対称性の群である．



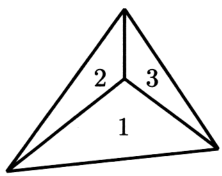
ラベル ij の面の
対面のラベルは ji

二十面体群 I は，二十面体を二十面体に移す回転からなる．各面に 1, ..., 5 の数値のペアでラベルを付けると，それは次数 5 の交代群 $A(5)$ を誘導する．



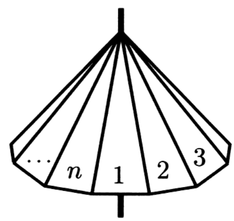
対面は同じ
ラベルをもつ

八面体群 O
$S(4)$ を誘導



背面のラベルは 4

四面体群 T
$A(4)$ を誘導



角　錐

巡回群 $C = C_n$
$C(n)$ を誘導

二面体群 $D = D_{2n}$ は，角柱を角柱に移す回転からなる．その四角形の面に $1, \ldots, n$ の番号を付けると，次の群となる．
$D(n) = \langle\, (12\ldots n), (1\, n)(2\, n-1)\ldots \,\rangle.$

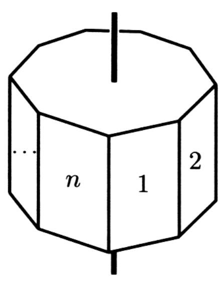


図 3.8 多面体群および軸性群 (axial group) は，n 個のシンボル上の種々の置換群 $G(n)$ と同型である．

3.5 有限四元数群

ここで, 四元数の有限群を列挙することにする．単位四元数 q を回転 $[q]: x \to \bar{q}xq$ に写す 2-対-1 の写像のもとで，四元数の有限群 Q は $[Q] = \{[q] \mid q \in Q\}$ に写されるが，それは，C, D, T, O, I のうちのどれか一つである．-1 が Q に属しているかいないかに従い，Q の位数は $[Q]$ の位数の 2 倍か 1 倍かになる．

$-1 \in Q$ である場合，$2G$ は $\{q \mid [q] \in G\}$ を意味することとして，それらを $2C_n, 2D_{2n}, 2T, 2O, 2I$ と表す．$-1 \notin Q$ であるとき，G は位数 2 の回転 g を含みえない．なぜなら，$[q] = g$ ならば $q^2 = -1$ が Q に属する[6]からである．残された場合[7] は C_n (n は奇数) であるが，これは位数 n の群 Q の像であり (例えば $\langle e^{2\pi i/n} \rangle$)，それを $1C_n$ と名づけよう．まとめると，次のようになる．

定理 12. 四元数の有限群は次のいずれかである：

$$2I \quad 2O \quad 2T \quad 2D_{2n} \quad 2C_n \quad 1C_n \ (n \text{ 奇数}).$$

これらの群の生成元は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} 2I &= \langle i_I, \omega \rangle & & i_I = \tfrac{i+\sigma j+\tau k}{2}, \quad \sigma = \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \tau = \tfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 2O &= \langle i_O, \omega \rangle & \text{ここで} \quad & i_O = \tfrac{j+k}{\sqrt{2}}, \quad \omega = \tfrac{-1+i+j+k}{2} \\ 2T &= \langle i_T, \omega \rangle & & i_T = i \\ 2D_{2n} &= \langle e_n, j \rangle & & e_n = e^{\pi i/n} \\ 2C_n &= \langle e_n \rangle & & \\ 1C_n &= \langle e_{n/2} \rangle & & \end{aligned}$$

3.6 キラルとアキラル，二倍体と一倍体

“キラル (chiral)” (“片手型，手型 (handed)” を意味する) という言葉は，それとその鏡像とが移動によって移りあうことができない物体を記述するために，Lord Kelvin によって 1896 年以前に科学に導入された．その反対の概念として，“アキラル (achiral)” (“非手型 (unhanded)” を意味する) もしくは “アン

[6] [訳注] $[q] \neq 1$ かつ $[q]^2 = [q^2] = 1$ ならば $q^2 = -1$ であるということ．

[7] [訳注] すなわち，$-1 \notin Q$ で G が位数 2 の回転を含まないとき．(多面体群，二面体群，偶数位数の巡回群は位数 2 の元を含む．)

フィキラル (amphichiral)” (“両手型 (either-handed)” を意味する) も使われてきた．

これらの用語をそのような物体だけではなく，それらの対称性群に対しても使用することにする．すなわち，ある対称性群のすべての作用が剛体運動で実現できるときに，その対称性群は**キラル (chiral)** であるといい，そうでないときに**アキラル (achiral)** であるということにする[8]．

有限の物理的な対象物に関しては，すべての対称性はその重心を固定し，それを原点にとるならば，それらは行列式の値が ± 1 である直交行列で表される．この群は，すべての元の行列式が $+1$ であるならばキラルであり，行列式が -1 である元を含むならば，アキラルである．

次に述べる二元的な区別については，いまだに命名されていないと思われる．ここで，生物学者から一組の用語を借りることによって，それを行う．ある群が “中心対称性 (central symmetry)” $-\mathbf{1} : x \to -x$ を含むならば，その群は**二倍体 (diploid)** (“二つ組みによって形成されるもの”) であるという．というのは，その元たちを $\pm g$ という組にすることができるからである．そうでない群は，**一倍体 (haploid)** (“単一のものから形成されるもの”) であるという[9]．

一般にこれらの区別により，群を 4 つのクラスに分けることになる．すなわち，キラル二倍体 (chiral diploid)，キラル一倍体 (chiral haploid)，アキラル二倍体 (achiral diploid)，そして，アキラル一倍体 (achiral haploid) である．しかしながら，この中の 1 つのタイプは存在しない．というのは，我々は奇数次元で考察をしているので，中心対称性 $-\mathbf{1}$ は行列式 -1 をもっており，したがって二倍体群は必然的にアキラルだからである．よって，そこには 3 つのクラスがある．すなわち：

- **二倍体 (diploid)** 群 (必然的にアキラルとなる)，
- **キラル (chiral)** 群 (必然的に一倍体となる)，
- **複合型 (hybrid)** 群 (アキラルにもかかわらず一倍体であるもの)．

---

[8] 3 次元の “キラル群” がそれの鏡像自身に一致するという矛盾にもかかわらず，この標準的な使用法を堅持する．また，このことは第 4 章で詳述する．

[9] ［訳注］ 1 セットの染色体をもっている細胞 (無性生殖生物の細胞や，有性生殖生物の生殖細胞など) を haploid (一倍体，単相) といい，2 セットの染色体をもっている細胞 (有性生殖生物の体細胞など) を diploid (二倍体，復相) という．

以下の数ページでは，群のタイプを列挙するためにこれらの概念を使用する．

3.7 射影的および楕円的群

射影的 (**projectively**) に考察するということは，二つの元がスカラー倍であるならば，それらを同一視するということである．我々にとって意味のあるスカラーは ± 1 だけであり，したがって，射影的に考察するということは，$+g$ と $-g$ とを一つの元 $[g]$ に置き換えるということである．

n 次元一般直交群 (general orthogonal group) GO_n は[10)]，すべての $n\times n$ 直交行列からなっており，同等なことであるが，それは n 次元ユークリッド空間の合同変換で原点を固定するもの全体でもある．また n 次元特殊直交群 SO_n は，行列式が 1 である GO_n の元からなっているということを思い出しておこう．これらのことから，射影的に考察することにより，n 次元射影一般直交群 PGO_n と n 次元射影特殊直交群 PSO_n が得られる．

しかしながら，n が奇数であるときには，$\det(-\mathbf{1})=-1$ であるので必然的に $PGO_n=PSO_n$ であり，また $PSO_n\cong SO_n$ である．なぜならば，$g,-g$ のうちどちらか一方が行列式 1 をもつので，それらの射影像は "正" のものの像に一致し，そして SO_n を射影的にみなしても同一視は起こらないからである．このことを有限部分群に適用すると，次が得られる．

定理 13. $PGO_3=PSO_3$ の有限部分群は次のいずれかである：

$$[I_{60}]\quad [O_{24}]\quad [T_{12}]\quad [D_{2n}]\quad [C_n].$$

典型的な各々の操作 $[g]$ は，互いに反対の行列のペア (行列式が 1 である $+g$ と行列式が -1 である行列 $-g$ と) で表されている．射影群を知ることは，GO_3 のすべての部分群を以下の節のように列挙することを可能にする．

10) ［訳注］ 一般直交群は通常 $GO_n(q,F)$ という形で定義されるものをいう．しかしここで意味しているのは直交群 O_n のことである．

3.8　射影群はすべてを語る

キラル群 (**chiral group**)：ある射影群 $[G]$ 内の要素 $[g]$ に対して $+g$ という元すべてからなっている群のことであり，それを $+G$ と表す．このような群には次の場合がある：

$+C$, **巡回的回転** (**cyclic rotation**) 群
$+D$, **二面体回転** (**dihedral rotation**) 群
$+T$, **四面体回転** (**tetrahedral rotation**) 群
$+O$, **八面体回転** (**octahedral rotation**) 群
$+I$, **二十面体回転** (**icosahedral rotation**) 群.

四元数的な用語を用いると，$+G$ は写像 $x \to q^{-1}xq$ $(q \in 2G)$ からなっている．

二倍体群 (**diploid group**)：ある射影群 $[G]$ 内の要素 $[g] \in [G]$ に対して $+g, -g$ というすべての組からなっている群のことであり，それゆえ，それを $\pm G$ と表す．これには次の場合がある：

$\pm C$, **二倍体巡回** (**diplo-cyclic**) 群
$\pm D$, **二倍体二面体** (**diplo-dihedral**) 群
$\pm T$, **二倍体四面体** (**diplo-tetrahedral**) 群
$\pm O$, **二倍体八面体** (**diplo-octahedral**) 群
$\pm I$, **二倍体二十面体** (**diplo-icosahedral**) 群.

群 $\pm G$ は写像 $x \to \pm q^{-1}xq$ $(q \in 2G)$ からなっている．

複合型群 (**hybrid group**) はより微妙である：符号を無視することによって得られる射影群 $[G]$ があり，そして，$[G]$ の各々の元に対して符号を選択する必要がある．すなわち，$[G]$ のある半数の元からなる部分群 $[H]$ の元に対しては符号を + とし，それ以外の残りの元に対しては − とするのである．

よって，複合型群 G は，その射影像 $[G]$ および符号が + の元からなる指数 2 の “半分の群” $[H]$ のペア $[H]$, $[G]$ を決定し，またそのようなペアから決定される．正式には “$+H - G$” という表記で，次のような元からなる群を表すこととする：

$$+h \quad ([h] \in [H]), \quad \text{および} \quad -g \quad ([g] \in [G] \setminus [H]).$$

正式な書き方ではないが，時々これを HG と略記することがある．このような群には次のものがある：

$$+C_n - C_{2n} = CC_{2n} = CC(2n),$$ **巡回巡回 (cyclo-cyclic)** 群

$$+C_n - D_{2n} = CD_{2n} = CD(n),$$ **巡回二面体 (cyclo-dihedral)** 群

$$+D_{2n} - D_{4n} = DD_{4n} = DD(2n),$$ **二面二面体 (dihedro-dihedral)** 群

$$+T_{12} - O_{24} = TO,$$ **四面八面体 (tetra-octahedral)** 群.

群 $+H - G$ は，次の写像

$$x \to +q^{-1}xq \ (q \in 2H), \qquad x \to -q^{-1}xq \ (q \in 2G \backslash 2H)$$

からなる．

我々が使用している表記法は，それから抽象的群構造を復元することが容易であることから，それを**代数的表記**とよぶことにする．その規則は，$+G$ および HG は G に同型であり，$\pm G$ は $C_2 \times G$ に同型であるということである．

3.9 群の幾何学的記述

図 3.1 は，これらすべての群をよく知られた多面体の言葉で表したものである．上部には，各多面体の全 (“**holo-**”) および回転あるいは隻 (“**chiro-**”) 群が，二十面体 ($\pm I = *532$ および $+I = 532$)，八面体 ($\pm O = *432$ および $+O = 432$)，四面体[11]($TO = *332$ および $+T = 332$) それぞれについて記されており，さらに，黄鉄鉱の結晶にしばしばその対称性がみられることから，**黄鉄鉱結晶 (pyritohedral)** 群ともよばれる二倍体四面体群 (diplo-tetrahedral) ($\pm T = 3*2$) も記されている．下部には，holo-角柱 (holo-prisms) 群 $*22n$ と chiro-角柱 (chiro-prisms) 群 $22n$，holo-反角柱 (holo-antiprisms) 群 $2*n$ と chiro-反角柱 (chiro-antiprisms) 群 $2nn$，そして holo-角錐 (holo-pyramids) 群 $*nn$ と chiro-角錐 (chiro-pyramids) 群 nn とがある．さらに，角柱群と反角柱群とから，その主軸に関する回転を保つものに限定することで得られる **pro-角柱群** ($n*$) と **pro-反角柱群** ($n\times$) も記されている．

---

11) ［訳注］ 四面体は中心対称性をもたないので，$\pm T$ が holo-四面体群になるわけではない．

表 3.1 は，これらの名前，軌道体表記，そして代数的表記の間の完全な辞書を提示している．表 3.2 は群の位数によって並べ替えたものである．幾何的名前と代数的名前との間には，幾何学者が回転を拡張するのに代数的により簡単な中心反転 $-\mathbf{1}$ ではなく鏡映を用いることを好むことに起因する，いらだたしい“切り替え” がある．それゆえ，我々の辞書は，$*22n$ のための $\pm D(n)/DD(2n)$ のように，“偶／奇” のエントリーを含んでいる．これは，$*22n$ は n が偶数のときには $\pm D(n)$ であり，奇数のときには $DD(2n)$ であることを意味している．

これらの群の間には，ある群が他の群の小さな指数の部分群となるという状況が数多くあり，そのなかで，すべての指数 2 の包含関係が図 3.9 と図 3.10 とに示されている．

表 3.1 群の辞書

chiro-二十面体 群	532	$= +I$
holo-二十面体 群	$*532$	$= \pm I$
chiro-八面体 群	432	$= +O$
holo-八面体 群	$*432$	$= \pm O$
chiro-四面体 群	332	$= +T$
holo-四面体 群	$*332$	$= TO$
黄鉄鉱結晶 (pyritohedral) 群	$3*2$	$= \pm T$

		偶数	/	奇数
(n-角形) chiro-角柱 群	$22n =$		$+D(n)$	
(n-角形) holo-角柱 群	$*22n =$	$\pm D(n)$	/	$DD(2n)$
(n-角形) holo-反角柱 群	$2*n =$	$DD(2n)$	/	$\pm D(n)$
(n-角形) chiro-角錐 群	$nn =$		$+C(n)$	
(n-角形) holo-角錐 群	$*nn =$		$CD(n)$	
(n-角形) pro-角柱 群	$n* =$	$\pm C(n)$	/	$CC(2n)$
(n-角形) pro-反角柱 群	$n\times =$	$CC(2n)$	/	$\pm C(n)$

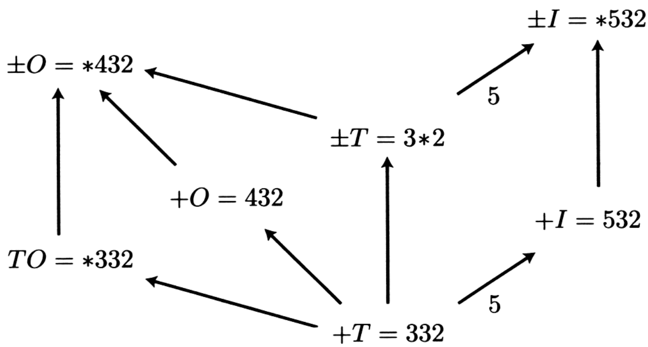


図 3.9 多面体群の小さな指数による包含関係 (特に記されていないときには，指数は 2 である)

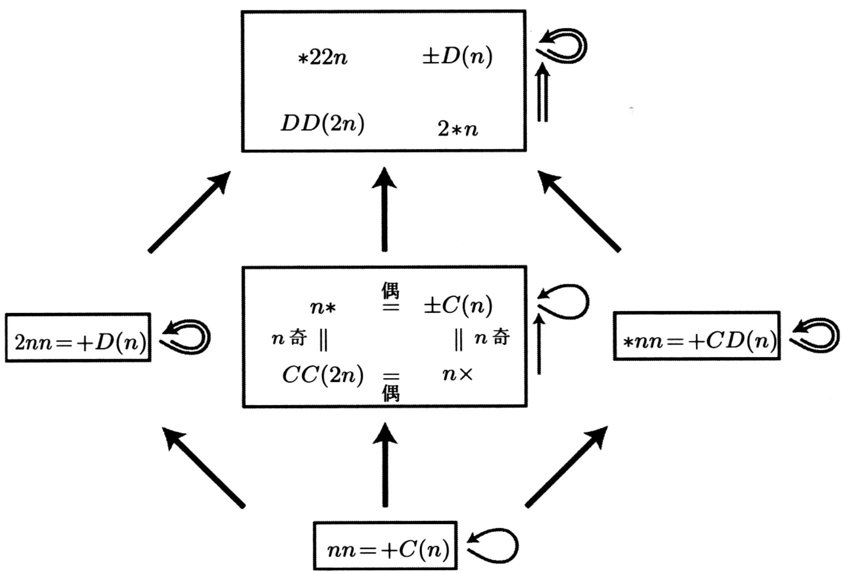


図 3.10 軸性群の間の指数 2 の包含関係．同一のパラメタ n をもつ群の間の指数 2 の包含関係は，箱の間の太線で表されている．上方の箱にある群は，下方の箱にある群 (もしも意味があるならば，対応する場所にある群) を含む．異なるパラメタ n と $m = \frac{n}{2}$ とをもつ群の間の指数 2 のすべての包含関係は，箱のそばの細線で示されている．したがって，$*22n$ は $*22m$ と $2{*}m$ との両方を含む (2 本の線があるので，各々 2 回)．

表 3.2 位数による群の分類．与えられた位数に対して，その位数のすべての群が一行に記されている．行頭にはその個数が，同型類の個数を表した添字とともに記されている．波線は (表の下に示されているように) 異なる構造をもつ群を分離する．表に現れていない位数 $8n, 8n+1, \ldots, 8n+7$ の行は，位数 16, 17, ..., 23 の行と同様である．

1	1	C_1=1				
3_1	2	C_2=22	$\pm C_1$ = ×	CC_2 = *		CD_2=*
1	3	C_3=33				
5_2	4	C_4=44	2× = CC_4		2* = $\pm C_2$	CD_4=*22
1	5	C_5=55				
5_2	6	C_6=66	$\pm C_3$ = 3×	CC_6 = 3*		CD_6=*33
1	7	C_7=77				
7_4	8	C_8=88	4× = CC_8		4* = $\pm C_4$	CD_8=*44
1	9	C_9=99				
5_2	10	C_{10}=10 10	$\pm C_5$ = 5×	CC_{10} = 5*		CD_{10}=*55
1	11	C_{11}=11 11				
8_4	12	C_{12}=12 12	6× = CC_{12}		6* = $\pm C_6$	CD_{12}=*66
1	13	C_{13}=13 13				
5_2	14	C_{14}=14 14	$\pm C_7$ = 7×	CC_{14} = 7*		CD_{14}=*77
1	15	C_{15}=15 15				
7_4	16	C_{16}=16 16	8× = CC_{16}		8* = $\pm C_8$	CD_{16}=*88
1	17	C_{17}=17 17				
5_2	18	C_{18}=18 18	$\pm C_9$ = 9×	CC_{18} = 9*		CD_{18}=*99
1	19	C_{19}=19 19				
7_3	20	C_{20}=20 20	10×= CC_{20}		10*=$\pm C_{10}$	CD_{20}=*10 10
1	21	C_{21}=21 21				
5_2	22	C_{22}=22 22	$\pm C_{11}$=11×	CC_{22} =11*		CD_{22}=*11 11
1	23	C_{23}=23 23				
10_6	24	C_{24}=24 24	12×= CC_{24}		12*=$\pm C_{12}$	CD_{24}=*12 12
1	27	C_{27}=27 27				
5_2	30	C_{30}=30 30	$\pm C_{15}$=15×	CC_{30} =15*		CD_{30}=*15 15
1	33	C_{33}=33 33				
7_3	36	C_{36}=36 36	18×= CC_{36}		18*=$\pm C_{18}$	CD_{36}=*18 18
1	39	C_{39}=39 39				
5_2	42	C_{42}=42 42	$\pm C_{21}$=21×	CC_{42} =21*		CD_{42}=*21 21
1	45	C_{45}=45 45				
8_5	48	C_{48}=48 48	24×= CC_{48}		24*=$\pm C_{24}$	CD_{48}=*24 24
1	51	C_{51}=51 51				
5_2	54	C_{54}=54 54	$\pm C_{27}$=27×	CC_{54} =27*		CD_{54}=*27 27
1	57	C_{57}=57 57				
8_4	60	C_{60}=60 60	30×= CC_{60}		30*=$\pm C_{30}$	CD_{60}=*30 30
1	75	C_{75}=75 75				
5_2	90	C_{90}=90 90	$\pm C_{45}$=45×	CC_{90} =45*		CD_{90}=*45 45
1	105	C_{105}=105 105				
8_5	120	C_{120}=120 120	60×=CC_{120}		60*=$\pm C_{60}$	CD_{120}=*60 60
			C		$2 \times C$	D

表 3.2. (続き)

D (続き)			2 × D	P		2 × P
$D_2=22$						
$D_4=222$	$\pm D_2=2*$	$DD_4=*22$				
$D_6=223$						
$D_8=224$		$2*2=DD_8$	$*222=\pm D_4$			
$D_{10}=225$						
$D_{12}=226$	$\pm D_6=2*3$	$DD_{12}=*223$		$T_{12}=332$		
$D_{14}=227$						
$D_{16}=228$		$2*4=DD_{16}$	$*224=\pm D_8$			
$D_{18}=229$						
$D_{20}=2\,2\,10$	$\pm D_{10}=2*5$	$DD_{20}=*225$				
$D_{22}=2\,2\,11$						
$D_{24}=2\,2\,12$		$2*6=DD_{24}$	$*226=\pm D_{12}$	$O_{24}=432$	$TO_{24}=*332$	$\pm T_{12}=3*2$
$D_{30}=2\,2\,15$						
$D_{36}=2\,2\,18$	$\pm D_{18}=2*9$	$DD_{36}=*229$				
$D_{42}=2\,2\,21$						
$D_{48}=2\,2\,24$		$2*12=DD_{48}$	$*2\,2\,12=\pm D_{24}$			$*432=\pm O_{24}$
$D_{54}=2\,2\,27$						
$D_{60}=2\,2\,30$	$\pm D_{30}=2*15$	$DD_{60}=*2\,2\,15$		$I_{60}=532$		
$D_{90}=2\,2\,45$						
$D_{120}=2\,2\,60$		$2*30=DD_{60}$	$*2\,2\,30=\pm D_{60}$			$*532=\pm I_{60}$

補遺：単純回転 $v \longrightarrow \overline{q}vq$

まずはじめに，軸が i である場合，すなわち $q = \cos\theta + i\sin\theta$ の場合について証明しよう．このとき，$iq = qi$ であり，一方 $jq = \overline{q}j$, $kq = \overline{q}k$ であることから，$v = xi + yj + zk$ とおくと，

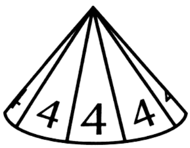
$$\overline{q}vq = \overline{q}(xi)q + \overline{q}(yj + zk)q = xi + \overline{q}^2(yj + zk)$$

となる．このことを

$$xi + (\cos(2\theta) - i\sin(2\theta))(y + zi)j$$

と書くことにより，j と k とで張られる 2 次元空間は 2θ の回転をうけるが，i で張られる 1 次元空間は固定されることがわかる．

第 6 章で四元数のシステムを導き出す方法は，任意の単位虚四元数を i とよぶことができ，それに垂直なものを j，そしてそれらの積を k とすることができる，ということを示している．ここで (第 6 章のことに言及することなく) 四元数が実際十分な対称性をもち，任意の単位虚数 $u = li + mj + nk$ を i としてとることができる，ということが次のように確かめられる．なぜならば，上記のタイプの回転 (i を固定) は k の係数を 0 にするために使うことができ，その後に同様の回転 (今度は k を固定) で j の係数を 0 にすることができるからである．



四元数と4次元群

4.1 はじめに

第3章の議論では，3次元直交写像は，それがキラルかアキラルかに応じて，

$$x \to \overline{q}xq, \quad \text{または} \quad -\overline{q}xq = \overline{q}\,\overline{x}q$$

という形をしているということを用いた．この章での最初の仕事は，一般の4次元直交写像は，

$$x \to \overline{l}xr, \quad \text{または} \quad \overline{l}\overline{x}r$$

という形 (ここで，l と r とは単位四元数) をしていることを確かめることである．

第6章では，任意の組成代数において，写像

$$x \to -q\overline{x}q$$

(ここで，q は任意の単位四元数) が，q に直交する超平面を固定する鏡映 (それゆえ，それを "q 方向の鏡映" とよぶ) であるのはなぜか，ということを説明する．しかし，四元数の場合にはそれを直接確かめることができるから，ここでそれを参照する必要はない．なぜならば，この写像のもとでは

$$uq \to -q\overline{q}\,\overline{u}q = -\overline{u}q$$

が成り立つので，q は -1 倍されるが iq, jq, kq は固定されることがわかるからである．

第 1 章で示したように，ユークリッド空間内の物体の任意の対称性は鏡映の合成である．そして，n 個の鏡映の合成は

$$x \to \pm q_n q_{n-1} \dots q_1 (x \text{ または } \overline{x}) q_1 q_2 \dots q_n$$

という写像となり，それは

$$[l, r] : x \to \bar{l} x r \quad (n \text{ が偶数}),$$

あるいは

$$*[l, r] : x \to \bar{l} \overline{x} r \quad (n \text{ が奇数})$$

のどちらかとなる．ここで，l と r とは単位四元数である[1) (二つめの式にある $*$ は四元数的共役 (quaternionic conjugation) を表す).

4.2 二つの 2-対-1 写像

ちょうど $l = r$ ($= q$ とおく) であるときには，これらの写像が 1 を固定することは簡単にわかるから，3 次元の結果を拡張して，第 3 章で述べた写像は

$$[q] = [q, q] \quad \text{および} \quad *[q] = *[q, q]$$

となる．特に，

$$[q] : x \to \overline{q} x q$$

という，単位四元数 q から SO_3 の元 $[q]$ への対応は，$[-q] = [q]$ がこれに関する唯一の等式であることから，2-対-1 対応である．単位四元数の順序組[2)から SO_4 の元へのこの新しい写像は，

$$[-l, -r] = [l, r]$$

が唯一の等式であることから，同様の性質をもっている．(写像 $[l, r]$ で恒等写像であるものは，1 を固定しなければならないので，3 次元の結果より，そのような非自明なものは $[-1, -1]$ だけである．)

---

1) ［訳注］ $l = \pm\overline{q_n q_{n-1} \dots q_1} = \pm\overline{q_1} \dots \overline{q_{n-1}}\ \overline{q_n}$, $r = q_1 q_2 \dots q_n$

2) これらは 4 次元スピン群 Spin_4 と同型な群をなす．

もしも射影的な考察をするならば,

$$[-l,-r]=[l,r]\,,\qquad [-l,r]=[l,-r]=-[l,r]$$

という等式からわかるように，$[\pm l,\pm r]$ という 4 個の表現が同一の射影的写像を表すので, あと少しだけの同一視による融合がある．[ ] という記号は $[-x]=[x]$ を満たす関数に対してのみ使われるという我々の約束事に従い，$[\![l,r]\!]$ (これは $[[l,r]]$ を意味する) という記号をこの射影的写像に対して用いる．

4.3 群の命名

詳しいことは後にまわすと，典型的な 4 次元キラル群に与えられる名前は，それが

射影的,　　　二倍体,　　　一倍体

のどれであるかに応じて，

$$\frac{1}{f}[\![L\times R]\!],\qquad \pm\frac{1}{f}[L\times R],\qquad +\frac{1}{f}[L\times R]$$

となる．ここで，L と R とは二つの 3 次元キラル群である．これは適切な命名のしかたである．なぜなら，例えば $\pm\frac{1}{f}[L\times R]$ は，この群が $\pm[l,r]$ という両符号の選択をもった適切な要素の中で $\frac{1}{f}$ の割合のものからなっている，ということを正確に示唆しているからである．特に，これらの群の位数は，それぞれ

$$\frac{|L|\times|R|}{f},\qquad 2\frac{|L|\times|R|}{f},\qquad \frac{|L|\times|R|}{f}$$

である．

$\frac{1}{f}[\![L\times R]\!]$ は，$l^\alpha=r^\beta$ であるような $l\in 2L,\ r\in 2R$ に対しての $[\![l,r]\!]$ というすべての元からなっている．ここで，α と β とは，これらの群からある位数 f の有限群 F の上への二つの準同型写像である．対応する二倍体群 $\pm\frac{1}{f}[L\times R]$ は同様の条件を満たす要素のペア $\pm[l,r]$ 全体からなっており，一倍体群の場合 (もしそれがあれば) は，各々のペアで一つの符号の選択を行う．

もしも，上記のもののうち，あるアキラル群の中で指数 2 をもっているものがあったとすると，その L と R とは同じタイプのもの (Q としよう) でなけれ

ばならず[3)]，よって，そのアキラル群に与えられる名前は

$$\frac{1}{f}[\![Q\times Q]\!]\cdot 2,\qquad \pm\frac{1}{f}[Q\times Q]\cdot 2,\qquad +\frac{1}{f}[Q\times Q]\cdot 2$$

という形式であり，その位数は

$$2\frac{|Q|^2}{f},\qquad 4\frac{|Q|^2}{f},\qquad 2\frac{|Q|^2}{f}$$

となる．

通常，準同型 α および β は，L と R とそして f とによって十分に決定されている．そうでない場合は，ある "装飾" を L と R とに付けて区別することにする．すなわち，括弧に入れた数値パラメタを上付添字として書く．ただし，バーはそれほど自明ではない二つの場合を示し，f, s, t が 1 であるときには，$\frac{1}{f}, (s), (t)$ を省略することを許すとする．同様に，アキラルの場合には，対応するキラル群を拡張する要素 $*[a,b]$ のための異なる選択が，必要であるならば最後の '2' を装飾することによって，示される．個々の装飾については，群を列挙した表 4.1, 4.2, 4.3 にある生成四元数によって十分に説明されている．

1889 年に Goursat [20] によって発見された，二つの群の直積 $A\times B$ の部分群 G についての次のような (簡単な) 定理を用いて，この列挙を行う．要素 $(l,r)\in G$ が存在するような要素 $l\in A$, $r\in B$ がそれぞれなす A, B の部分群 L, R を考えて，それらを "左部分群"，"右部分群" とよぶ．また，要素 $(l,1)$, $(1,r)$ が G に存在するような要素 l, r は，それぞれ L, R の正規部分群 L_0, R_0 をなし，それらを "左核"，"右核" とよぶ．

いま，$l_0\in L_0$, $r_0\in R_0$ とするとき，

$$(l,r)\in G\Leftrightarrow (ll_0, rr_0)\in G$$

であり，$(l,r)\in G$ という条件は，それぞれ L_0 と R_0 とを法とした l と r との値にのみ依っている．実際，この条件は左商群 L/L_0 と右商群 R/R_0 との間の同型対応[4)]をつくり上げ，それらはある抽象的な群 F のコピーとなる．もしも F の位数が f であるならば，G は $L\times R$ の中の指数 f の部分群となる．

---

3) [訳注] そのアキラル群の元でキラル部分群に含まれないものは $*[a,b]$ という形をしている．この元による共役 $(*[a,b])^{-1}[l,r](*[a,b])=[br\bar{b}, al\bar{a}]$ を考えると，これは L と R との間の同型対応を与えることとなる．

4) [訳注] lL_0 に対して，$(l,r)\in G$ となるような rR_0 はただ一つであるから，それを対応させる．

表 4.1 キラル群 I. これらは "メタキラル" ("metachiral") 群の大部分であり (4.6 節をみよ), 他のいくつかは表 4.2 の最後の数行にある*).

群	生成元
$\pm[I \times O]$	$[i_I, 1], [\omega, 1], [1, i_O], [1, \omega];$
$\pm[I \times T]$	$[i_I, 1], [\omega, 1], [1, i], [1, \omega];$
$\pm[I \times D_{2n}]$	$[i_I, 1], [\omega, 1], [1, e_n], [1, j];$
$\pm[I \times C_n]$	$[i_I, 1], [\omega, 1], [1, e_n];$
$\pm[O \times T]$	$[i_O, 1], [\omega, 1], [1, i], [1, \omega];$
$\pm[O \times D_{2n}]$	$[i_O, 1], [\omega, 1], [1, e_n], [1, j];$
$\pm\frac{1}{2}[O \times D_{2n}]$	$[i, 1], [\omega, 1], [1, e_n];[i_O, j]$
$\pm\frac{1}{2}[O \times \overline{D}_{4n}]$	$[i, 1], [\omega, 1], [1, e_n], [1, j];[i_O, e_{2n}]$
$\pm\frac{1}{6}[O \times D_{6n}]$	$[i, 1], [j, 1], [1, e_n];[i_O, j], [\omega, e_{3n}]$
$\pm[O \times C_n]$	$[i_O, 1], [\omega, 1], [1, e_n];$
$\pm\frac{1}{2}[O \times C_{2n}]$	$[i, 1], [\omega, 1], [1, e_n];[i_O, e_{2n}]$
$\pm[T \times D_{2n}]$	$[i, 1], [\omega, 1], [1, e_n], [1, j];$
$\pm[T \times C_n]$	$[i, 1], [\omega, 1], [1, e_n];$
$\pm\frac{1}{3}[T \times C_{3n}]$	$[i, 1], [1, e_n];[\omega, e_{3n}]$
$\pm\frac{1}{2}[D_{2m} \times \overline{D}_{4n}]$	$[e_m, 1], [1, e_n], [1, j];[j, e_{2n}]$
$\pm[D_{2m} \times C_n]$	$[e_m, 1], [j, 1], [1, e_n];$
$\pm\frac{1}{2}[D_{2m} \times C_{2n}]$	$[e_m, 1], [1, e_n];[j, e_{2n}]$
$+\frac{1}{2}[D_{2m} \times C_{2n}]$	$-\quad,\quad-\quad;\quad+$
$\pm\frac{1}{2}[\overline{D}_{4m} \times C_{2n}]$	$[e_m, 1], [j, 1], [1, e_n];[e_{2m}, e_{2n}]$

*) [訳注] 生成元で " ; " の左側にあるものは, $[l, 1]$ あるいは $[1, r]$ という形をしているものであり, 右側にあるものはそうでないものである.

表 4.2 キラル群 II. これらの群はほとんどが "直交キラル (orthochiral)" 群であり，少数の "平行キラル (parachiral)" 群が最後の数行にある．一倍体の場合 (そのときは適切な符号選択を指示する) を除いて，生成元は両方の符号をとる．"コクセター名" については 4.4 節で解説する．

群	生成元	コクセター名
$\pm[I\times I]$	$[i_I,1],[\omega,1],[1,i_I],[1,\omega];$	$[3,3,5]^+$
$\pm\frac{1}{60}[I\times I]$	$;[\omega,\omega],[i_I,i_I]$	$2.[3,5]^+$
$+\frac{1}{60}[I\times I]$	$;\ +\ ,\ +$	$[3,5]^+$
$\pm\frac{1}{60}[I\times\overline{I}]$	$;[\omega,\omega],[i_I,i'_I]$	$2.[3,3,3]^+$
$+\frac{1}{60}[I\times\overline{I}]$	$;\ +\ ,\ +$	$[3,3,3]^+$
$\pm[O\times O]$	$[i_O,1],[\omega,1],[1,i_O],[1,\omega];$	$[3,4,3]^+:2$
$\pm\frac{1}{2}[O\times O]$	$[i,1],[\omega,1],[1,i],[1,\omega];[i_O,i_O]$	$[3,4,3]^+$
$\pm\frac{1}{6}[O\times O]$	$[i,1],[j,1],[1,i],[1,j];[\omega,\omega],[i_O,i_O]$	$[3,3,4]^+$
$\pm\frac{1}{24}[O\times O]$	$;[\omega,\omega],[i_O,i_O]$	$2.[3,4]^+$
$+\frac{1}{24}[O\times O]$	$;\ +\ ,\ +$	$[3,4]^+$
$+\frac{1}{24}[O\times\overline{O}]$	$;\ +\ ,\ -$	$[2,3,3]^+$
$\pm[T\times T]$	$[i,1],[\omega,1],[1,i],[1,\omega];$	$[^+3,4,3^+]$
$\pm\frac{1}{3}[T\times T]$	$[i,1],[j,1],[1,i],[1,j];[\omega,\omega]$	$[^+3,3,4^+]$
$\cong\pm\frac{1}{3}[T\times\overline{T}]$	$[i,1],[j,1],[1,i],[1,j];[\omega,\overline{\omega}]$	"
$\pm\frac{1}{12}[T\times T]$	$;[\omega,\omega],[i,i]$	$2.[3,3]^+$
$\cong\pm\frac{1}{12}[T\times\overline{T}]$	$;[\omega,\overline{\omega}],[i,-i]$	"
$+\frac{1}{12}[T\times T]$	$;\ +\ ,\ +$	$[3,3]^+$
$\cong+\frac{1}{12}[T\times\overline{T}]$	$;\ +\ ,\ +$	"
$\pm[D_{2m}\times D_{2n}]$	$[e_m,1],[j,1],[1,e_n],[1,j];$	
$\pm\frac{1}{2}[\overline{D}_{4m}\times\overline{D}_{4n}]$	$[e_m,1],[j,1],[1,e_n],[1,j];[e_{2m},e_{2n}]$	
$\pm\frac{1}{4}[D_{4m}\times\overline{D}_{4n}]$	$[e_m,1],[1,e_n];[e_{2m},j],[j,e_{2n}]$	<u>条件</u>
$+\frac{1}{4}[D_{4m}\times\overline{D}_{4n}]$	$-\ ,\ -\ ;\ +\ ,\ +$	m,n 奇数
$\pm\frac{1}{2f}[D_{2mf}\times D^{(s)}_{2nf}]$	$[e_m,1],[1,e_n];[e_{mf},e^s_{nf}],[j,j]$	$(s,f)=1$
$+\frac{1}{2f}[D_{2mf}\times D^{(s)}_{2nf}]$	$-\ ,\ -\ ;\ +\ ,\ +$	m,n 奇数, $(s,2f)=1$
$\pm\frac{1}{f}[C_{mf}\times C^{(s)}_{nf}]$	$[e_m,1],[1,e_n];[e_{mf},e^s_{nf}]$	$(s,f)=1$
$+\frac{1}{f}[C_{mf}\times C^{(s)}_{nf}]$	$-\ ,\ -\ ;\ +$	m,n 奇数, $(s,2f)=1$

表 4.3 アキラル群

群	拡張元	コクセター名
$\pm[I\times I]\cdot 2$	$*$	$[3,3,5]$
$\pm\frac{1}{60}[I\times I]\cdot 2$	$*$	$2.[3,5]$
$+\frac{1}{60}[I\times I]\cdot 2_3$ or 2_1	$*$ or $-*$	$[3,5]$ or $[3,5]^\circ$
$\pm\frac{1}{60}[I\times\overline{I}]\cdot 2$	$*$	$2.[3,3,3]$
$+\frac{1}{60}[I\times\overline{I}]\cdot 2_3$ or 2_1	$*$ or $-*$	$[3,3,3]^\circ$ or $[3,3,3]$
$\pm[O\times O]\cdot 2$	$*$	$[3,4,3]:2$
$\pm\frac{1}{2}[O\times O]\cdot 2$ or $\overline{2}$	$*$ or $*[1,i_O]$	$[3,4,3]$ or $[3,4,3]^{+}\cdot 2$
$\pm\frac{1}{6}[O\times O]\cdot 2$	$*$	$[3,3,4]$
$\pm\frac{1}{24}[O\times O]\cdot 2$	$*$	$2.[3,4]$
$+\frac{1}{24}[O\times O]\cdot 2_3$ or 2_1	$*$ or $-*$	$[3,4]$ or $[3,4]^\circ$
$+\frac{1}{24}[O\times\overline{O}]\cdot 2_3$ or 2_1	$*$ or $-*$	$[2,3,3]^\circ$ or $[2,3,3]$
$\pm[T\times T]\cdot 2$	$*$	$[3,4,3^+]$
$\pm\frac{1}{3}[T\times T]\cdot 2$	$*$	$[^+3,3,4]$
$\pm\frac{1}{3}[T\times\overline{T}]\cdot 2$	$*$	$[3,3,4^+]$
$\pm\frac{1}{12}[T\times T]\cdot 2$	$*$	$2.[^+3,4]$
$\pm\frac{1}{12}[T\times\overline{T}]\cdot 2$	$*$	$2.[3,3]$
$+\frac{1}{12}[T\times T]\cdot 2_3$ or 2_1	$*$ or $-*$	$[^+3,4]$ or $[^+3,4]^\circ$
$+\frac{1}{12}[T\times\overline{T}]\cdot 2_3$ or 2_1	$*$ or $-*$	$[3,3]^\circ$ or $[3,3]$
$\pm[D_{2n}\times D_{2n}]\cdot 2$	$*$	
$\pm\frac{1}{2}[\overline{D}_{4n}\times\overline{D}_{4n}]\cdot 2$ or $\overline{2}$	$*$ or $*[1,e_{2n}]$	
$\pm\frac{1}{4}[D_{4n}\times\overline{D}_{4n}]\cdot 2$	$*$	<u>条件</u>
$+\frac{1}{4}[D_{4n}\times\overline{D}_{4n}]\cdot 2_3$ or 2_1	$*$ or $-*$	n 奇数
$\pm\frac{1}{2f}[D_{2nf}\times D^{(s)}_{2nf}]\cdot 2^{(\alpha,\beta)}$ or $\overline{2}$	$*[e^{\alpha}_{2nf}, e^{\alpha s+\beta f}_{2nf}]$ or $*[1,j]$	
$+\frac{1}{2f}[D_{2nf}\times D^{(s)}_{2nf}]\cdot 2^{(\alpha,\beta)}$ or $\overline{2}$	$*[e^{\alpha}_{2nf}, e^{\alpha s+\beta f}_{2nf}]$ or $*[1,j]$	補遺をみよ
$\pm\frac{1}{f}[C_{nf}\times C^{(s)}_{nf}]\cdot 2^{(\gamma)}$	$*[1,e^{\gamma(f,s+1)}_{2nf}]$	
$+\frac{1}{f}[C_{nf}\times C^{(s)}_{nf}]\cdot 2^{(\gamma)}$	$*[1,e^{\gamma(f,s+1)}_{2nf}]$	

4 次元射影群 PSO_4 の典型的な要素 $[\![l, r]\!]$ は l, r の符号と独立であることから，それは PSO_3 の対応する要素 $[l]$, $[r]$ の組で定まり，それは $PSO_4 \cong PSO_3 \times PSO_3$ であることを示している．グルサ (Goursat) の理論によると，PSO_4 の典型的な有限部分群は

$$\{[\![l, r]\!] \mid [l] \in L, [r] \in R, [l]^\alpha = [r]^\beta\}$$

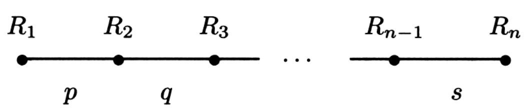
という形をしている．ここで，L, R は PSO_3 の二つの有限部分群であり，α, β はそれらからある抽象的な群 F の上への準同型写像である．さらに，α, β は対応する四元数群 $2L$, $2R$ 上で定義されていて，-1 がそれらの核に入っているものとみなすことは問題がない．このことは，“ $\frac{1}{f}[\![L \times R]\!]$ ” という形式は確かにすべての射影的キラル群をカバーしており，他の場合も同様 (一倍体の場合には，$2L \times 2R$ の部分群で $[l, r]$ がその群に属しているようなものを考えなければならない) であることを保証している．

ここまでで，4 次元群の簡単でエレガントで完全な列挙を与えるために四元数がいかに用いられるかということをみてきた．しかしながら，幾何学的な他の方法で群が定義されているとき，その四元数的な名前を決定すること，あるいはその逆は，困難である場合がある．次の節では一つの重要な例に取り組むことにする．

4.4 多面体群のコクセター表記

正多面体とそれに付随する群のためのコクセター (Coxeter) の表記法 (Schläfli からの翻案) は広く用いられている．この節では，表 4.2 と表 4.3 とに与えられているような “多面体” 群のための完全な表記法を得るために，彼のシステムを少しだけ拡張する．

Coxeter は，記号 $[p, q, \ldots, r, s]$ を n 次元多面体 $\{p, q, \ldots, r, s\}$ の対称群を表すために用いた．この群は鏡映 R_1, $\ldots$, R_n で生成され，それらは n ノード・ダイアグラムのノードに対応している．



これらに関しては，次のような群表示がある．

$$1 = R_1^2 = (R_1R_2)^p = R_2^2 = (R_2R_3)^q = \cdots = R_{n-1}^2 = (R_{n-1}R_n)^s = R_n^2 \\ = (R_iR_j)^2 \qquad (j > i+1).$$

これは明らかに，$R_1, \ldots, R_n$ からなる偶数長のワード (すなわち偶数個の積) で構成される指数 2 の部分群 $[p, q, \ldots, r, s]^+$ をもつ．

$p, q, \ldots, r, s$ の中でちょうど一つが偶数であるとき (それが R_k と R_{k+1} との間にあるものとする)，さらに 2 個の部分群

$$[^+p, q, \ldots, r, s] \quad \text{および} \quad [p, q, \ldots, r, s^+]$$

があり，それらはそれぞれ

$$R_1, \ldots, R_k \quad \text{および} \quad R_{k+1}, \ldots, R_n$$

に関しては全部で偶数回だけ含むようなワードから構成されており，さらにそれらの共通部分は指数 4 の部分群 $[^+p, q, \ldots, r, s^+]$ となり，これは**両方**のものを偶数回含むワードからなっている．本書ではコクセターの記法をわずかに変更して，彼が $[p^+, \ldots]$ と書いたものを $[^+p, \ldots]$ として，いくつかの特別な場合に用いている．

すべての 4 次元 “多面体” 群のためのエレガントな名前を得るために，コクセターの表記法に G° という記号を加えることにより，G の “反対 (opposite)” の群を表すことにする．これは，G の要素 g を $\det = +1$ か -1 かに応じて $+g$ か $-g$ かで置き換えることにより得られる群のことである．最後に，先頭にある “ 2. ” は負元を付け加えることによる群の二重化を表し，末尾にある “ :2 ” あるいは “ ˙2 ” は，他の方法 (分離あるいは非分離) による二重化を表すことにする．

4.5 群の列挙に関する歴史

これらの群の列挙については長い歴史があり，Goursat が 1889 年に楕円群を列挙したことにはじまる．1931 年には，Threlfall と Seifert [40] とにより，すべての群が列挙され，そしてそれらとトポロジーとのいくつかの関わり合いが発見された．英語による標準的な文献には，Du Val [41] のエレガントな小本 *Homographies, Quaternions, and Rotations* がある．

しかしながら，ここで Goursat と Du Val とがいくつかの群を省いていること，そして**すべての**それらの列挙が不完全である，という他の重要な意義をも指摘しなければならない．すべての各々の群は Seifert と Threlfall とのリストに現れるが，それは不確かな回数だけ現れる．なぜなら，パラメタに依存する群の間の同値性が完全にはリストされていないからである．文献において，その問題が提起されたそれ以前の唯一のものは，その場限りの不変量のリストを用いてそれらを区別した Hurley [25] による結晶群の決定においてだけである．Brown, Bülow, Neubüser, Wondratschek そして Zassenhaus [7] は，ハーレイの不変量を 4 次元空間群の列挙のために使用し続けたのである．

問題が完全に自明ではないことは，Du Val が

$$(D_{\frac{1}{2}nr}/C_n; D_{\frac{1}{2}nr}/C_n)^*_{s,h,k-}$$

とよんだ群における h と k のすべての可能な値が，幾何的に同型な群を定めてしまうという事実によって，きちんと例証される．我々のシステムにおいては，異なるパラメタを用いて，この群は $\pm\frac{1}{2f}[D_{2nf} \times D^{(s)}_{2nf}] \cdot \overline{2}$ となる．

4.6 キラル性についての注釈

キラル性ということはそのみかけよりも微妙である．以前に述べたとおり，物体の対称性群が “キラル” であるというとき，それは物体がキラルであるということを本当に意味している．3 次元では，直交群の有限部分群は，“キラル” のものでさえ，すべてそれらの鏡像[5)]とちょうど同じである．

---

5) ［訳注］ 空間群の部分群 G の鏡像とは，ある鏡映 ρ による共役 $\rho^{-1}G\rho$ のことである．

しかしながら，3 次元における 219 個の結晶空間群の中で，11 個のものが，それら自身の鏡像と異なっている[6]．(この理由により，いくつかの文献においては総数を 230 個としている．) そのような群は，**メタキラル(metachiral)** とよばれる．$L \neq R$ であるような任意の群 $\pm\frac{1}{f}[L \times R]$ あるいは $+\frac{1}{f}[L \times R]$ は明らかにメタキラルである[7]から，メタキラル性は 4 次元直交群の部分群の中では一般的である．

さて，この次元において初めて現れるもう一つの興味深い現象がある．より低い次元においては，メタキラルでないどんなキラル群も何らかのアキラル群のキラル部分[8] である．そのような群を "正統キラル (orthodoxly chiral)" あるいは**直交キラル(orthochiral)** とよぶ．いい換えれば，対応するキラル物体はその鏡像のコピーに重ねることができ，アキラルな物体をもたらす，ということである[9]．

しかしながら，4 次元では，このことはつねに真であるわけではない．メタキラルでないキラル群で，アキラル群のキラル部分群ではない群を**平行キラル(parachiral)** とよぶ．例えば，平行キラル群である $\pm\frac{1}{7}[C_7 \times C_7^{(2)}]$ は指数 14 でアキラル群 $\pm[C_7 \times C_7] \cdot 2$ に含まれるが，その鏡像は $\pm\frac{1}{7}[C_7 \times C_7^{(4)}]$ であることから，あるアキラル群のキラル部分ではありえない．

さらに別の区別が何人かの化学者によってなされている．それは，"靴のキラル性" と "馬鈴薯のキラル性" との間の区別である．我々は，靴も馬鈴薯も普通はアキラルではないと思っているのに，右の靴と左の靴とを正しく区別するが，しかし，"右の馬鈴薯" と "左の馬鈴薯" の区別はしない．なぜであろうか？

---

6) [訳注] 結晶空間群 G_1, G_2 が，あるアフィン写像 f によって共役，すなわち $G_2 = f^{-1}G_1 f$ であるとき，G_1 と G_2 とは同値であるという．3 次元の場合，この同値類の個数が 219 個であるが，しかし，f を向きを保つものに制限した場合，その個数は 230 個となる．

7) [訳注] $G = \pm\frac{1}{f}[L \times R]$ あるいは $+\frac{1}{f}[L \times R]$ がメタキラルでない，すなわちある鏡映 $\rho : x \to -q\overline{x}q$ によって $G = \rho^{-1}G\rho$ であるとすると，$[l, r] \in G$ の鏡映 ρ による共役は $[qr\overline{q}, \overline{q}lq]$ であるから，これは L と R との間の同型対応を引き起こす．

8) [訳注] すべての回転からなる部分群のこと．

9) [訳注] 例えば，反時計回りの向きの付いた 2 次元の正三角形はキラルな物体であるが，それの鏡像と同じ形 (向きは時計回り) をしているので，それに重ね合わせて両方の向きをもった正三角形にでき，それはアキラルな物体である．

その答えは, 馬鈴薯は, それがキラル馬鈴薯であるという特性をつねに保ったまま, その鏡像に連続的に変形することが可能である, ということである. トポロジストはキラル馬鈴薯のクラスの中でのそのような変形を "イソトピー (isotopy)" とよぶので, 我々も靴の種類のキラル性を**アイソキラル性** (**isochirality**) とよぶことにする (その意味は, イソトピーを法としてもキラル性があるということ).

2 次元では, キラル (すなわち, 不等辺) 三角形の類は, 辺が反時計回りに増加する ("左" 三角形) か時計回りに増加するか ("右" 三角形) かで区別できるので, アイソキラルである. 3 次元では, すべてのキラル四面体がそれらのクラスの中でアイソトピックであるので, キラル四面体はアイソキラルではない.

補遺：表の完全性

ここで, さきほど与えた表の完全性を, L, R から同一の抽象的有限群 F へのすべての可能な準同型写像を扱っていることを示すことにより, 確かめる. ここで,

$$[l,r]^{[l_1,r_1]} = [l^{l_1}, r^{r_1}]$$

であることから, L, R をそれら自身の共役に独立に取り替えることができ, 我々はその "幾何的同値性" という概念上で考察するだけでよいことに注意しておく.

表 4.1 および表 4.2 の完全性

いまや 3 次元キラル群の正規部分群を分類することは容易である. それは, 次の各々の位数に対してちょうど 1 個ずつある.

$1, 4, 12$	T のとき
$1, 4, 12, 24$	O のとき
$1, 60$	I のとき
m	C_n または D_n (ただし $m \mid n$) のとき

ただし, n が偶数のときに D_{2n} は位数 n の正規部分群 C_n および D_n をもつ,

ということを除く．そこで，D_{2n} に対する n が偶数で $f=2$ のときの二つの場合

$$\tfrac{1}{2}[\ldots D_{2n}\ldots] \quad (\text{核} = C_n \text{ のとき }),$$

$$\tfrac{1}{2}[\ldots \overline{D}_{2n}\ldots] \quad (\text{核} = D_n \text{ のとき })$$

を除いて，α および β の核は指数 f で定まる．

しかしながら，F には GO_3 のどのような要素によっても引き起こされない自己同型写像 (それは必然的に外部自己同型である) もあるので，同一の核をもつ準同型をもっている異なったケースがある．それらが次のいずれかであることは，容易に確かめられる．

群の記号	F の自己同型写像
$\frac{1}{60}[\ldots \overline{I}\ldots]$	A_5 を S_5 へ拡大する
$+\frac{1}{24}[\ldots \overline{O}\ldots]$	$2S_4\backslash 2A_4$ の元を -1 倍する[10]
$\frac{1}{4}[\ldots \overline{D}\ldots]$	"巡回部分" を動かす[11]
$\frac{1}{f}[\ldots D^{(s)}_{nf}\ldots]$ }	{ s 乗する写像として
$\frac{1}{f}[\ldots C^{(s)}_{nf}\ldots]$ }	{ 巡回部分へ作用

表 4.2 の中に，$\overline{T}$ を含む代替の表記が与えられた 3 個の群がある．この少し奇妙な繰り返しは，表 4.3 の簡約化に役立っている．

表 4.3 の完全性

同型対応 $L/L_0 \cong R/R_0$ に対応する "半分の群" H から，それに拡張元 $*[a,b]$ を付加することによりアキラル群 G (それは H を正規部分群としてもつ) が得られる．この拡張元は (あるコストを伴うが) $*[1,c]$ という形に簡約化でき，さらに，c は (コストなしに) R_0 の任意の元によって乗算されることが可能であ

---

[10] 射影的と二倍体との場合には，このエントリーは無視することができる．

[11] Goursat，そして彼に引き続いた Du Val は，$\frac{1}{4}[D_{4m}\times\overline{D}_{4n}]$ を書き落とした．それは，$F\cong D_4$ がその非自明な要素を自由に (freely) 置換させる自己同型をもっていることから生じる群であり，そのようなことは，その "巡回部分 (cyclic part)" C_k が一意的に定まっているより大きな D_{2k} では起こらないことである．

るか，あるいは R の任意の内部自己同型で写るものに置き換えることができることを示そう．最終的には，$((*[1,c])^2=[c,c]$ は H 内になければならないから) その同型対応によって (R_0 を法として) 固定される (R の) 部分に c が属することとなる．

まず最初に，$[1,a]$ による共役は，$*[a,b]$ を

$$(*[a,b])^{[1,a]}=[1,\overline{a}]\ *[a,b][1,a]=*[\overline{a}a,ba]\qquad (=*[1,c]\ \text{とおく})$$

のように置き換えることをみよう[12)]．

先ほどコストといった意味は，$[l,r]$ を $[l,\overline{a}ra]$ で置き換えることであり，それはその同型対応をある幾何的に同値なものに換えることでもある．もしも $r_0\in R_0$ であるならば，$*[1,cr_0]$ は任意の $[l_1,r_1]\in H$ に対して $*[l_1,cr_1]$ が定めるものと同一の群を定め，そして，それは $[1,l_1]$ による共役によって $*[1,cr_1l_1]$ に簡約化されるが，その共役作用は，$[l,r]$ の r を R の任意の内部自己同型による像 $\overline{l_1}rl_1$ で置き換える．

これらの考察は，$\cdot 2_3$ あるいは $\cdot 2_1$ (添字は拡張元によって -1 倍される空間の次元を表す) とそれぞれ記されたものの拡張元を

$$*[1,\pm 1]=*\ \text{または}\ -*$$

に制限するためには，ほとんどの場合に十分である．例外は "$D\times D$" と "$C\times C$" との場合であり，その場合には拡張元が記載されている．また，さらに

$$\pm\frac{1}{2}[O\times O]\cdot\overline{2}\ ,\ \text{あるいは}\ \ \pm\frac{1}{4}[\overline{D}_{4n}\times\overline{D}_{4n}]\cdot\overline{2}$$

の場合も例外であるが，それぞれ $c=i_O$ あるいは $c=e_{2n}$ ととることができる．

注意をしたように，$*[1,c]$ という形への簡約化は，自己同型写像を幾何的に同値なものに置き換えるというコストを伴い，"$T\times T$" の場合には，恒等自己同型が

$$\omega\to\overline{\omega}\ ,\qquad i\to\overline{i}=-i$$

---

12) ［訳注］ $[l,r]:x\to\bar{l}xr$, $*[l,r]:x\to\bar{l}\overline{x}r$ であるが，写像を施す順番は左から右としているので，写像としても指数的な表記がふさわしい．よって，$x^{[1,\overline{a}]*[a,b][1,a]}=(x\overline{a})^{*[a,b][1,a]}=(\overline{a}a\overline{x}b)^{[1,a]}=\overline{a}a\overline{x}ba=x^{*[\overline{a}a,ba]}$ となる．

で置き換わることにもなりうるが，そのことを表では $\overline{T}$ という記号で表している．

表 4.3 の最後の 8 行について

$\pm[D\times D]\cdot 2$ について考察するが，まず，拡張元 $*[a,b]$ は (H を法として) 簡約化でき，H を正規化し，それゆえ E も正規化し，さらに，$[e^\gamma, e^\delta]$ という形の元からなる H の部分群をも正規化するという事実からはじめよう．なぜならば，($f\leq 2$ という，ここでは排除している簡単な場合を除いて) E は H の特性部分群であるから[13]である．このことは，a と b とを $e^{\mathbb{R}}$ または $e^{\mathbb{R}}j$ [14]の中に入れるので，よって ($[j,j]\in H$ であることより) $*[a,b]=*[e^\lambda, e^\mu]$ ととるか (この場合，群は $\pm[D\times D]\cdot 2^{(\alpha,\beta)}$ となる)，あるいは，$*[a,b]=*[e^\lambda, e^\mu j]$ ととる (この場合，群は $\pm[D\times D]\cdot\overline{2}$ となる[15]) ことができる．最初の場合には，

$$[j,j]^{*[e^\lambda,e^\mu]}=[j,j]^{[e^\lambda,e^\mu]}=[je^{2\lambda}, je^{2\mu}]\in H$$

であるので，

$$\lambda=\frac{\alpha}{2}\quad \text{かつ}\quad \mu=\frac{\alpha s+\beta f}{s}$$

となる．ここで $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ である．また，この元の平方が H に属するという事実は，$\alpha g+\beta f\equiv 0 \pmod 2$ という条件を課すことになる．

$[e,e^s]$, $[1,e^f]\in H$ であるから，α または β の値が 2 増えても，G は変わらない．同様の理由により，最初は，s は f を法として定められていたが，次の等式

$$*[e^{\frac{\alpha}{2}}, e^{\frac{\alpha s+\beta f}{2}}]=*[e^{\frac{\alpha}{2}}, e^{\frac{\alpha(s+f)+(\beta-\alpha)f}{2}}]$$

は

$$\langle s,\alpha,\beta\rangle\approx\langle s+f,\alpha,\beta-\alpha\rangle$$

---

[13] [訳注] G の特性部分群 (characteristic subgroup) とは，G のすべての自己同型写像によって固定されるような部分群 (当然 G の正規部分群となる) のことである．また，G の正規部分群の特性部分群は G の正規部分群である．

[14] [訳注] ここで，$e=e^{\frac{\pi i}{n}}$．

[15] 2 番目の場合, 次のような新しい生成元を選んで簡単にすることができる．すなわち, $[1,e^\lambda]$ による共役作用は E を固定したまま $*[e^\lambda, e^\mu j]$ を $*[1,e^{\mu-\lambda}j]=*[1,J]$ で置き換え, $(*[1,J])^2=[J,J]$ は確かに H に入っているので，よって J は j の代わりとなりうる．

であることを示しているので，以後，s は $2f$ を法として定まっているとみなしたほうがよい．$[e^s, s] = [e, e^s]^{*[a,b]}$ と $[e, e^{s^2}]$ との両方が H 内にあるので，ある整数 $g \in \mathbb{Z}$ に対して，$s^2 = fg + 1$ となる．

等価性について考察するためには，この群 $\langle s, \alpha, \beta \rangle$ を同様の群 $\langle s', \alpha', \beta' \rangle$ に写す元についてのすべての可能性を考慮しなければならない．そのような元は H を法として簡約化することができ，$*$ と $[1, j]$ と (それらは $\langle s, \alpha, \beta \rangle$ をそれ自身か $\langle -s, \alpha, -\beta \rangle$ かに写す) に注目すると，H を正規化し，それゆえ，$a, b \in \mathbb{Z}$ を用いて $[e^{\frac{a}{2}}, e^{\frac{as+bf}{2}}]$ と表されると仮定できる．これによる変換は，(f, g) の倍数 (奇数倍でもありうる) を (α, β) に加えることになるので，よってさらなる条件式は，$\langle s, \alpha, \beta \rangle \approx \langle s, \alpha + f, \beta + g \rangle$ だけである．

要約すると，この群については次のようになる．

変数	条件	等価性
$\alpha \pmod 2$	$s^2 = fg + 1$	$\langle s, \alpha, \beta \rangle$
$\beta \pmod 2$	$\alpha g + \beta f \equiv 0 \pmod 2$	$\approx \langle -s, \alpha, -\beta \rangle$
$s \pmod{2f}$		$\approx \langle s + f, \alpha, \beta - \alpha \rangle$
		$\approx \langle s, \alpha + f, \beta + g \rangle$

また，$\pm[D \times D^{(s)}] \cdot \overline{2}$ については次のようになる．

変数	条件	等価性
$s \pmod f$	$s^2 = fg - 1$	$\langle s \rangle \approx \langle -s \rangle$

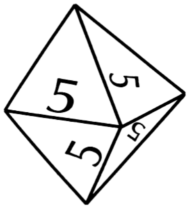
さらに，他の群の場合の等価性は次のように要約される．

群	変数	条件	等価性
$+[D \times D^{(s)}] \cdot 2^{(\alpha,\beta)}$	$\alpha \pmod 2$ $\beta \pmod 4$ $s \pmod{4f}$	$s^2 = fg+1$ $\alpha g \equiv 0 \pmod 4$ n :奇数，g :偶数	$\langle s,\alpha,\beta\rangle$ $\approx \langle -s,\alpha,-\beta\rangle$ $\approx \langle s+2f,\alpha,\beta-2\alpha\rangle$ $\approx \langle s,\alpha,\beta+2h\rangle$
$+[D \times D] \cdot \overline{2}$	$s \pmod{2f}$	$s^2 = fg-1, g=2h$:偶数	$\langle s\rangle \approx \langle -s\rangle$
$\pm[C \times C] \cdot 2^{(\gamma)}$	$s \pmod f$ $\gamma \pmod 2$ $*[1, e^{\frac{\gamma(f,s+1)}{2}}]$	$s^2 = fg-1$ $(g,s-1)\gamma \equiv 0 \pmod 2$ $(f,s+1)\gamma \equiv 0 \pmod 2$ g :偶数	$\langle s,\gamma\rangle$ $\approx \langle s,-\gamma\rangle$
$+[C \times C] \cdot 2^{(\gamma)}$	$s \pmod{2f}$ $\gamma \pmod{2d}$ $*[1, e^{\frac{\gamma(f,s+1)}{2}}]$ $d = \frac{(2f,s+1)}{(f,s+1)}$	$s^2 = fg-1$ $(g,s-1)\gamma \equiv 0 \pmod 4$ $(f,s+1)\gamma \equiv 0 \pmod 2$ n :奇数，$g=2h$:偶数	$\langle s,\gamma\rangle$ $\approx \langle s,-\gamma\rangle$

表 4.4 は，表 4.3 の最後の 4 行に現れる異なるアキラル群についての要約である．最後の 8 行においては，D_2 を C_2 で，また $\overline{D_4}$ を D_4 で置き換えることが許されている．

表 4.4　異なるアキラル群

f,g 偶数	:	$\cdot 2^{(0,0)}$, $\cdot 2^{(0,1)}$, $\cdot 2^{(1,0)}$, $\cdot 2^{(1,1)}$, $\cdot\overline{2}$	
その他		$\cdot 2$, $\cdot\overline{2}$	
f,h 偶数	:	$\cdot 2^{(0,0)}$, $\cdot 2^{(0,2)}$, $\cdot 2^{(1,0)}$, $\cdot 2^{(1,2)}$, $\cdot\overline{2}$	
その他		$\cdot 2$, $\cdot\overline{2}$	
g 偶数	:	$\cdot 2^{(0)}$, $\cdot 2^{(1)}$, $\cdot\overline{2}$	
その他		$\cdot 2$, $\cdot\overline{2}$	
h 偶数	:	$\cdot 2^{(0)}$, $\cdot 2^{(d)}$, $\cdot\overline{2}$	$d = \frac{(2f,s+1)}{(f,s+1)}$
その他		$\cdot 2$, $\cdot\overline{2}$	



Hruwitzの四元整数

5.1 Hruwitzの四元整数

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ が**整数**であるという意味を，どのように定義するべきなのだろうか．一つの自明な可能性は (ガウス整数 (Gaussian integer) の例に従い)，a, b, c, d が通常の有理整数であることを要求することである．正式には，$a + bi + cj + dk$ が**リプシッツ整数** (**Lipschitz integer**) であるとは，$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ であるときをいう．このことは，あるガウス整数 z_1, z_2 に対して $q = z_1 + z_2 j$ であるということに同値である．しかしながら，Hurwitz が後に，より良い性質をもった次のような異なる定義をみつけた．四元数 $a+bi+cj+dk$ が**フルビッツ整数** (**Hurwitz integer**) であるとは，a, b, c, d のすべてが $\mathbb{Z}$ に入っているか，あるいはすべてが $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ に入っているかのときをいう．

第2章において，ガウス整数の算術について解説したときに重要な役割をしたものは "より小さい剰余を伴う除算"，すなわち，任意の (ガウス) 整数 Z を0ではない任意のガウス整数 z で割ることができ，ガウス整数の商 Q と Z よりも小さな剰余 R とが得られる，ということであった．これがいかにして証明されるかを見直しておこう．$Z/z = a + bi$ として，A, B をそれぞれ a, b にもっとも近い有理整数とし，$Q = A + Bi$ とおく．すると，

$$
\begin{aligned}
R/z &= Z/z - Q \\
&= (a - A) + (b - B)i
\end{aligned}
$$

であり，

$$N(R/z) = (a-A)^2 + (b-B)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$$

となる．

しかしながら，Z と $z \neq 0$ とが $q = Zz^{-1} = a + bi + cj + dk$ であるようなリプシッツ四元整数であり，A, B, C, D をそれぞれ a, b, c, d にもっとも近い有理整数とし，そして $Q = A + Bi + Cj + Dk$, $R = Z - Qz$ と定めるとき，

$$N(Rz^{-1}) = (a-A)^2 + \cdots + (d-D)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

は，$N(R) \le N(z)$ ということしか示していない．残念ながら，議論がノルム縮小の繰り返しに依存しているために，この不等式に等号があるとないとでは大きな違いとなる．

ここで，$N(R) = N(z)$ であるような唯一の場合は，

$$|a-A| = |b-B| = |c-C| = |d-D| = \frac{1}{2}$$

のときであり，それは a, b, c, d のすべてが $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ に入っているときであることに注意しよう．このことが，次のように Hurwitz の定義を望ましいものとする．Z と $z \neq 0$ とがフルビッツ整数であるとき，q, Q, R を上記と同じように定めると，

$$Z = Qz + R \quad (N(R) < N(z))$$

となるか，あるいは

$$N(R) = N(z)$$

となり，後者の場合は先ほどの議論により，q が実際にフルビッツ整数であり，$Z = qz + 0$ (すなわち $N(0) < N(z)$) となる．

以上で，“より小さい剰余をもつ除算” の性質はリプシッツ整数にはないがフルビッツ整数にはある，ということが証明された．このことは，**L** で考察するよりも **H** で考察したほうが簡単であることを意味する[1]．**L** に関する定理は，通常，**H** に関する定理に帰着して証明される．

[1] ［訳注］ 定義はしていないが，もちろん，**L** はリプシッツ整数全体，**H** はフルビッツ整数全体のことである．

5.2　素元と単元

さて，フルビッツ整数の素元分解定理について考察しよう．素なフルビッツ整数 (フルビッツ素元) P とは，そのノルムが有理素数 p であるようなものである．有理素数 p を二つの有理正整数の積で表す方法は $p = p \times 1$ と $p = 1 \times p$ とだけであるという事実に類似して，P を二つのフルビッツ整数の積で表す方法は，

$$P = P' \times U\ ,\quad P = V \times P''$$

(ここで $N(P') = N(P'') = p$ かつ $N(U) = N(V) = 1$) だけである[2)]．そこで，**フルビッツ単元**，すなわちノルムが 1 であるフルビッツ整数についても考察する必要がある．

定理 1.　フルビッツ単元は 24 個あり，そのうちの 8 個はリプシッツ単元 $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ であり，他の 16 個は $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i \pm \frac{1}{2}j \pm \frac{1}{2}k$ である．

証明　リプシッツ単元については，$|a|, |b|, |c|, |d| \geq 1$ のいずれか一つは成り立っていて，しかも $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ということから，その一つだけが ± 1 であり，他は 0 となる．残りの場合は，$|a|, |b|, |c|, |d| \geq \frac{1}{2}$ であり $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ということから，それらのすべてが $\pm\frac{1}{2}$ となる．□

フルビッツ単元によって，フルビッツ素元の分解の問題は完全に解かれる．すなわち，P がフルビッツ素元であるとき，二つのフルビッツ整数の積としてそれを分解する方法は，U と V とを 24 個のフルビッツ単元上を動かしたときの，

$$P = PU^{-1} \times U, \qquad P = V \times V^{-1}P$$

だけである．これらが可能性のすべてである理由は，すでに示したとおり (フルビッツ素元の) 分解の一つの因子は単元であり，一つの因子が他方の因子を決定するからである．また，U, V が単元であれば U^{-1}, V^{-1} もそうであり，そして PU^{-1} も $V^{-1}P$ もフルビッツ整数であるので，実際にそれらは分解になっている．

---

2) ［訳注］ これは，ノルムの性質 $N(xy) = N(x)N(y)$ から示される．

フルビッツ整数の素元への分解は，その整数が非原始的 (ある有理整数 $n > 1$ で割り切れる) であるかどうかにおおいに依存している．原始的 (primitive) な場合には，次が成り立つ．

定理 2. Q を原始的フルビッツ整数，q をそのノルムとする．q の有理素数への分解 $p_0 p_1 \cdots p_k$ に対して，$N(P_0) = p_0, \ldots, N(P_k) = p_k$ であるようなフルビッツ素元による

$$Q = P_0 P_1 \cdots P_k$$

という分解がある．このとき，“Q の分解 $P_0 P_1 \ldots P_k$ は $N(Q)$ の分解 $p_0 p_1 \ldots p_k$ を**モデル**としている” という．さらに，$Q = P_0 P_1 \cdots P_k$ が $p_0 p_1 \ldots p_k$ をモデルとした一つの分解であるとき，同じモデルの他の分解は次の形をしている：

$$Q = P_0 U_1 \cdot U_1^{-1} P_1 U_2 \cdot \cdots \cdot U_k^{-1} P_k,$$

すなわち，“ある有理素因数分解をモデルとした分解は，**単元転移(unit-migration)** を除いて一意的である”．

したがって，例えばノルムが 60 の原始的フルビッツ四元数は，単元転移を除き，ちょうど 12 個の素四元数分解をもつ．すなわち，それらは，60 を有理素数へ分解する次の 12 通りの分解をモデルとした分解である．

2.2.3.5	2.2.5.3	2.3.2.5	2.5.2.3	2.3.5.2	2.5.3.2
3.2.2.5	5.2.2.3	3.2.5.2	5.2.3.2	3.5.2.2	5.3.2.2

すべての分解の個数は，24 個の単元が 3 箇所の場所において任意に転移することができるから，$24^3 \times 12 = 165888$ 個となる．

証明 ここで，$[x]$ という記号を $N(x)$ の意味で，また $[x, y]$ を内積の意味で用いることにする[3]．イデアル $p_0\mathsf{H} + Q\mathsf{H}$ は単項 (principal) イデアルである[4] ので，あるフルビッツ整数 P_0 に対して

$$p_0\mathsf{H} + Q\mathsf{H} = P_0\mathsf{H}$$

---

3) ［訳注］ $[x] = x\overline{x}$ であり $[a, b] = \frac{1}{2}(a\overline{b} + b\overline{a})$ である．

4) ［訳注］ 先ほど示したように，フルビッツ四元数のなす環はユークリッド整域であり，よって単項イデアル整域でもある．

とかける．ここで，$[P_0]$ は $[p_0] = p_0^2$ を割り切るので，それは $1, p_0, p_0^2$ のいずれかである．

しかしながら，$[P_0] = 1$ ならば $p_0\mathsf{H} + Q\mathsf{H}$ は H 全体となってしまうので，それはありえない．なぜなら，その典型的な要素 $p_0a + Qb$ のノルムは

$$[p_0a] + 2[p_0a, Qb] + [Qb] = p_0^2[a] + 2p_0[a, Qb] + p_0 \cdots p_k[b]$$

となり，これは p_0 で割り切れるからである．また，P_0 のノルムは p_0^2 でもありえない．なぜなら，P_0 は p_0 を割り切るので，$p_0 = P_0U$ と表され，ここで U は単元となり (なぜなら $[P_0] = [p_0]$ であるから $[U] = 1$)，p_0 が Q を割り切ることになってしまう (なぜなら $p_0U^{-1} = P_0$) からである．残された可能性は $[P_0] = p_0$ であるが，これは，P_0 が Q を割り切るフルビッツ素元であることを意味している．

そこで，$Q = P_0Q_1$ とおくと $[Q_1] = p_1 \cdots p_k$ であり，また P_0 は右から単元をかけることを除いて一意的である．この議論を繰り返すことにより，同様の分解

$$Q_1 = P_1Q_2,\ \ Q_2 = P_2Q_3,\ \ \ldots$$

を得る．ここで，$P_1, P_2, \ldots$ はノルムが $p_1, p_2, \ldots$ であるようなフルビッツ素元である．よって，$Q = P_0P_1 \cdots P_kQ'$ を得るが，ここで Q' は必然的に単元である (そして，P_k の中に吸収することができる)．以上の議論は，分解は単元転移を除いて一意的であることを示している．

5.3 通常の素数の四元数による分解

議論を完結させる前に，有理整数，特に有理素数 p の四元数による分解について調べておく必要がある．次のことを思い出しておく．

(i) **平方剰余 (quadratic residue)** r とは，ある整数 $a \not\equiv 0 \pmod p$ について $r \equiv a^2 \pmod p$ となるようなもの，

であり，また**非平方剰余**とは，そうでない数 $\not\equiv 0 \pmod p$ のことである．ここで次の二つのことを示しておこう．

(ii) 非平方剰余数 n は，ある二つの整数 $a, b \not\equiv 0 \pmod p$ を用いて，$n \equiv a^2 + b^2 \pmod p$ と表される．

(iii) ある整数 a, b, c (ただし $(a,b,c) \not\equiv (0,0,0) \pmod p$) に対して，$0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod p$ となる[5)]．

任意の非平方剰余は任意に固定した一つの非平方剰余に平方剰余をかけることにより得られるので，(ii) を証明するには，最小の非平方剰余 n に対してのみ示せばよい．そのとき，$r = n - 1$ は平方剰余であり，$r \equiv a^2 \pmod p$ とすると，$n = a^2 + 1^2 \pmod p$ が得られる．最後に (iii) であるが，-1 も 2 個以下の平方剰余の和であるから，$0 = -1 + 1^2$ は 3 個以下の平方剰余の和となる．以上のことより，次の定理を示すことができる．

定理 3. 任意の有理素数 p は，次のような四元数分解

$$p = P_0 \overline{P_0}$$

を少なくとも一つもつ．

証明 $x^2 \equiv (p-x)^2 \pmod p$ であるから，(iii) において，$0 \le a, b, c \le p/2$ と仮定してもよく，そのとき，ある整数 $0 < m < p$ に対して $a^2 + b^2 + c^2 = mp$ であり，そこで四元数 $Q = a + bi + cj$ を考えると，そのノルムは mp となる．このとき，$p\mathsf{H} + Q\mathsf{H} = P_0\mathsf{H}$ とすると，以前にみたとおり，$[P_0] = p$ となる．

□

実際，有理素数 p の分解は，ノルムが p である四元数があるのと同じだけ存在している．解析的手法によって，その総個数は $24(p+1)$ ($p > 2$ のとき) もしくは 24 ($p = 2$ のとき) であることが示される．

Q が原始的とは限らないとしたとき，一意分解性について何が起こるのであろうか．ノルムが $2^{n_0} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ である四元数 Q が有理整数 $2^{s_0} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_k^{s_k}$ でちょうど割り切れると仮定しよう．そのとき，それに対する答えは，次で与えられる．

---

5) ［訳注］ 原著では "ある整数 $a, b, c \not\equiv 0 \pmod p$ に対して，$0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod p$ となる" と記されているが，これは明らかに間違いである．例えば $p = 5$ のときには，0 は非ゼロの平方剰余 3 個の和にはならない．

定理 4. $N(Q)$ の与えられた分解をモデルとする Q の分解の個数 (単元移転したものを同一視して数える) は，含んでいる奇素数の値において“打ち切りカタラン多項式”を評価したものの積

$$\prod_{i\geq 1} C_{n_i,s_i}(p_i)$$

になる．

最初のいくつかのカタラン多項式は

$$\begin{aligned} C_0(x) = C_1(x) &= 1, \\ C_2(x) &= x + 1, \\ C_3(x) &= 2x + 1, \\ C_4(x) &= 2x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

であり，その一般的な係数は“カタランの三角形”から読み取ることができ (図 5.1 参照．また，[22] をみよ)，打ち切りカタラン多項式 $C_{n,s}(x)$ は，$C_n(x)$ の高々 s 次の項からなっている．

×										
	1									
×		1								
	1		1							
×		2		1						
	2		3		1					
×		5		4		1				
	5		9		5		1			
×		14		14		6		1		
	14		28		20		7		1	
×		42		48		27		8		1

図 5.1 カタランの三角形は，垂直な線の左側には数値がないということを除いて，パスカルの三角形と同じ法則で形成される．

証明　すべての P_i が同一のノルム p をもつような分解

$$Q = P_1 P_2 \ldots P_n$$

について考えることで十分である．

Q (そのノルムは p^n) が p^s では割り切れるが p^{s+1} では割り切れないとして，$Q = p^s P$ とおこう．このとき P は原始的であるから，それは単元転移を除いて一意的な分解

$$P = P_1' P_2' \ldots P_{n-2s}'$$

をもつ．

ここで，ノルムが p である四元数の個数は (単元を左からかけたものを同一視すると) ちょうど $p+1$ であるという結果を利用し，そして P_1 が (単元を左からかけたものを同一視すると) P_1' に等しいかどうかについて場合分けをする．等しいという 1 通りの場合，ノルムが p^{n-1} の四元数で依然としてちょうど p^s で割り切れるものの分解問題に簡約化されるが，帰納的にそれは $C_{n-1,s}(p)$ 個の解をもつ．等しくないという p 通りの場合，ノルムが p^{n-1} の四元数でちょうど p^{s-1} で割り切れるものの分解問題に帰着するが，それらは各々 $C_{n-1,s-1}(p)$ 個の解をもつ．よって次の帰納的式を得るが，これはカタラン多項式を定めるものである：

$$C_{n,s}(p) = C_{n-1,s}(p) + pC_{n-1,s-1}(p).$$

例えば，ノルムが p^7 の四元数でちょうど p^2 で割り切れるものを分解するという問題は，ノルムが p^6 の四元数でちょうど p^2 で割り切れるものを分解する問題 ($C_{6,2} = 9p^2 + 5p + 1$ 個の解がある) 1 つと，ノルムが p^6 の四元数でちょうど p で割り切れるものを分解する p 個の問題 (各々 $C_{6,1} = 5p + 1$ 個の解がある) とに帰着され，その解の総数は

$$9p^2 + 5p + 1 + p(5p + 1) = 14p^2 + 6p + 1 = C_{7,2}(p)$$

に一致する．□

ノルムが $p^m q^n \ldots$ である四元数でちょうど $p^s q^t \ldots$ で割り切れるものに対しては，ノルム p の因子の選択の個数はすでにわかっており，それは，因子がどこにおかれようとも変わりはないので，単元転移を同一視したすべての分解の個数は，異なる素因数についての分解の個数の積である．

5.4 メタ交換問題

有理整数でさえ厳密には一意分解性をもっていない．例えば，

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = (-3) \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-2) = \cdots$$

のように分解される．しかし，このような分解は他の分解から容易に得られるので，“一意分解性” は正当なものといえる．

通常，定理 2 は原始的 (フルビッツ, Hurwitzian) 四元数の一意分解性定理とよばれるが，それは，与えられたモデルに沿った分解に関するものとしてはその名前に値するものである．なぜなら，単元転移というよく知られた操作ですべての分解が関係しているからである (非原始的な場合には，再結合 (以下をみよ) の操作を付け加えるべきである)．

しかしながら，このことはフルビッツ四元数の “一意分解性” を完全に正当化してはいない．そのためには，**メタ交換問題**とよばれる問題を解く必要がある．それは，pq をモデルとした素元分解 PQ が，対応する qp をモデルとした素元分解 $Q'P'$ をいかにして決定するか，ということである．この困難な問題は本書で取り組むようなものではない．

実際，素元分解が変化するときには，基本的な 3 通りの方法がある．PQ を $PU \cdot \overline{U}Q$ で置き換える “単元転移” はすでにみた．また，ノルム p の共役な素元のペア $P\overline{P}$ をそのような他のペア $P'\overline{P'}$ で置き換える**再結合**もある．最後に，ノルム p, q の異なるフルビッツ素元の積 PQ は，ノルム q，p のフルビッツ素元の積 $Q'P'$ に再分解される．この最後の操作を P と Q との**メタ交換**とよぶ (結果である分解 $Q'P'$ は単元転移を無視して一意である)．ある四元数の任意の二つの素元分解は，これらの 3 通りの “操作” を繰り返して適用することで関連づけられる，ということを示すのはそれほど困難ではない．

5.5 リプシッツ整数の分解

リプシッツ整数の分解について理解するために，加法と乗法との両方について，それがフルビッツ整数とどのように関連しているかということを理解しなければならない．

幾何的には，リプシッツ整数 $\mathsf{L} = I_4$ は 4 次元立方格子 I_4 をなす．フルビッツ整数には，さらに 2 個の I_4 のコピー，すなわち $\omega\mathsf{L} = I_4'$ と $\overline{\omega}\mathsf{L} = I_4''$ とがある[6]．これら 3 個の I_4 の共通部分 (それは任意の 2 個の共通部分でもある) は

$$\mathsf{L} \cap \omega\mathsf{L} \cap \overline{\omega}\mathsf{L} = D_4$$

(4 次元 “象限体格子 (orthoplex lattice)” またはタイプ D_4 のルート格子)[7] である．すべてのフルビッツ整数の格子はそれらの和集合

$$\mathsf{H} = \mathsf{L} \cup \omega\mathsf{L} \cup \overline{\omega}\mathsf{L} = D_4^*$$

であり，事実そうであるので，D_4 に対する双対格子とよばれる．

加法に関しては，D_4 は 4 個の剰余系 $[0]$, $[1]$, $[\omega]$, $[\overline{\omega}]$ を D_4^* 内にもち，そして，これまでに言及した格子はこれらの種々の和集合となる (図 5.2).

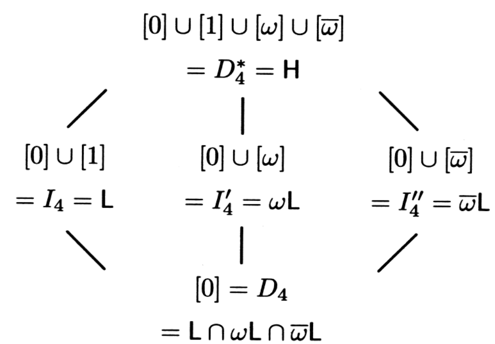


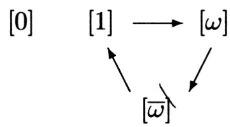
図 5.2 H の部分格子間の包含関係

---

6) [訳注] $\omega = \frac{-1+i+j+k}{2}$.

7) [訳注] $D_4 = \{a + bi + cj + dk \in \mathsf{L} \mid a + b + c + d \equiv 0 \pmod 2\}$.

乗法に関する重要な事実は，ω をかけること (両方の側において) は次のような効果



をもち，それは D_4 および D_4^* を固定するが，I_4, I'_4, I''_4 を巡回的に置換するということである．

偶数ノルムのフルビッツ整数が，ちょうど [0] に入っているものにあたる．実際，それらに ω もしくは $\overline{\omega}$ を (どちらの側からでも) かけてもまだ [0] 内にある．奇数ノルムのフルビッツ整数は [1], [ω], [$\overline{\omega}$] のいずれか一つに入っているが，それは Q, ωQ, $\overline{\omega}Q$ の中のちょうど一つが [1] 内にあるということと同値である．

5.5.1 リプシッツ整数分解の数え上げ

以上のことから次を示すことができる．

補題 1. リプシッツ整数のフルビッツ整数への任意の分解は，単元転移により，リプシッツ整数への分解に同値となる．

用いられる単元は ω の累乗であり，それはリプシッツ整数ではないので，このことはリプシッツ整数の分解は決して “一意” ではないことを意味している．

証明 リプシッツ整数 α の 2 項分解における “ω 転移”

$$\alpha = \beta\gamma \to \alpha = \beta\omega \cdot \overline{\omega}\gamma$$

の影響について調べてみる．α は [0] または [1] 内にあるので，図 5.3 は β および γ が属する剰余類についてのすべての可能性を含んでおり，そして，各々の三つ組み内に両方の因子がリプシッツ整数である分解[8]がある．□

さらに詳しい考察により，次が示される．

---

[8] ［訳注］ [0][0] と [1][0] と [0][1] と [1][1] とである．

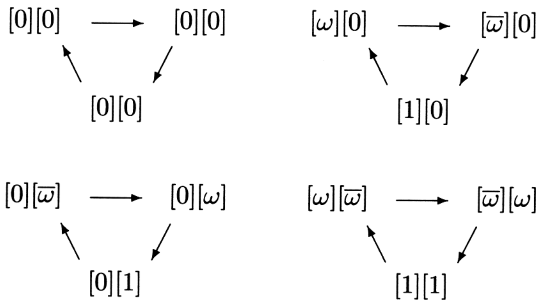


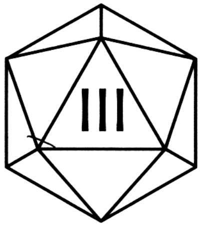
図 5.3 “$\beta\gamma \to \beta\omega \cdot \overline{\omega}\gamma$”

定理 5. リプシッツ整数分解で，単元転移により

$$P_1 P_2 \dots P_k$$

に同値なものの個数は，$8^{k-1}3^{l-1}$ である．ここで，l はノルムが偶数値の因子の個数である．

p_i と $p_{i+1} \dots p_k$ との間で，8 個のリプシッツ単元を移すことがいつでもできて，そして，3 個の ω の累乗も両方のノルムが偶数であるときには移すことができる．



八元数
と
その7, 8次元幾何への応用

八元数 (octonion) は

$$x_\infty + x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6$$

(x_t は実数) という形式的な式で表され，それらは

$$\begin{gathered} i_n^2 = -1 \\ i_{n+1} i_{n+2} = i_{n+4} = -i_{n+2} i_{n+1} \\ i_{n+2} i_{n+4} = i_{n+1} = -i_{n+4} i_{n+2} \\ i_{n+4} i_{n+1} = i_{n+2} = -i_{n+1} i_{n+4} \end{gathered}$$

(添字は 7 を法とする) を満たす単元 $i_0, \ldots, i_6$ で生成される実数上の代数をなす.

6

組成代数

第 2 章において，二平方等式

$$(x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$

を，複素代数においては積のノルムはノルムの積である，すなわち

$$[z_1z_2] = [z_1][z_2]$$

ということを意味していると解釈した[1]．第 3 章と第 4 章とでは，四元数からなるハミルトン代数における対応する結果を活用した．

本章では，組成法則 (composition law) を満たす代数は，(乗算の単位元をもつ代数については正確に，そうでない代数についてはイソトピーの範囲内で) よく知られた 1, 2, 4, 8 次元のものだけであるという，Hurwitz の有名な定理を証明する．最初に，代数は $1x = x = x1$ であるような両側単位元 1 をもつということを仮定し，そして通常どおりに

$$[x, y] = \frac{[x+y] - [x] - [y]}{2}$$

とおく[2](我々は実数上で考えており，そこでは 2 は可逆元である)．そして，すべての t に対して $[x, t] = [y, t]$ であるならば $x = y$ である，という原理を繰り返して用いることとする．

---

[1] 角括弧がノルムおよび内積のために用いられているが，もちろん，以前の章にあるいくつかの写像と混同しないように．

[2] ［訳注］ もちろん，$[x]$ は 2 次形式であり，$[x, y]$ が非退化双線形形式であるということも仮定している．

6.1 乗法法則

最初に,

1)　**組成法則 (Composition Law) :**　$[xy] = [x][y]$.

からの, いくつかの帰結を推論しておく.

2)　**縮尺法則 (Scaling Law) :**　$[xy, xz] = [x][y, z] \quad ([xz, yz] = [x, y][z])$.

証明　(M1) において y を $y+z$ で置き換えると,

$$[xy] + [xz] + 2[xy, xz] \overset{\mathrm{M1}}{=} [x]([y] + 2[y, z] + [z])$$

となり, これからいくつかの項を消去して 2 で割ると得られる[3]. □

3)　**交換法則 (Exchange Law) :** $[xy, uz] = 2[x, u][y, z] - [xz, uy]$.

証明　(M2) において x を $x+u$ で置き換えると,

$$[xy, xz] + [xy, uz] + [uy, xz] + [uy, uz] \overset{\mathrm{M2}}{=} ([x] + 2[x, u] + [u])[y, z]$$

となり, これからいくつかの項を消去して整理すると得られる. □

6.2 共役法則

共役 $\overline{x} = 2[x, 1] - x$ を伴った三つの法則を証明しよう.

1)　**組紐法則 (Braid Laws) :**　$[xy, z] = [y, \overline{x}z] \quad ([xy, z] = [x, z\overline{y}])$.

証明　(M3) において $u = 1$ とおくと,

$$2[x, 1][y, z] - [xz, y] = [y, (2[x, 1] - x)z]$$

が得られる. (図 6.1 がその名前を説明している.)　□

2)　**二重共役 (Biconjugation) :**　$\overline{\overline{x}} = x$.

3) [訳注] $[x+y] = 2[x, y] + [x] + [y]$ という等式も用いる. しかし, $2[xy, xz] - 2[x][y, z] = 0$ であることを, $[x, y]$ の定義と (M1) とから示すほうが, わかりやすいかもしれない.

証明　$y=1$, $z=t$ とおき (C1) を 2 回施すと，すべての t に対して

$$[x,t]=[x1,t]=[1,\overline{x}t]=[\overline{\overline{x}}1,t]=[\overline{\overline{x}},t]$$

となるので，$\overline{\overline{x}}=x$ を得る[4]．□

積の共役 (Product Conjugation)：　$\overline{xy}=\overline{y}\,\overline{x}$.　(C

証明　(C2) を繰り返して用いると次を得る．

$$[\overline{y}\,\overline{x},t]=[\overline{x},yt]=[\overline{x}\,\overline{t},y]=[\overline{t},xy]=[\overline{t},xy.1]=[\overline{t}\,\overline{xy},1]=[\overline{xy},t].\qquad\square$$

6.3　二重化法則

いま，H を n 次元部分代数で 1 を含むものとし，i を H に直交する単位ベクトルとする．また，$a,b,c,\ldots$ は H の典型的な要素を表すものとする．このとき，$\overline{i}=-i$ かつ $[i,a]=0$ であり，これは交換法則の適用において，$2[x,u][y,z]$ という項が消える要因となる．次の 3 個の法則は，“ディクソンの二重化代数 (Dickson double algebra)” $H+iH$ 上の内積，共役，そして積を，H 上のそれらの言葉で評価するものである[5]．

内積の二重化 (Inner-Product Doubling)：　(D

$$[a+ib,c+id]=[a,c]+[b,d].$$

証明　次の三つの等式から示される．

$$[a,id]=[a\overline{d},i]=0,\quad [ib,c]=[i,c\overline{b}]=0,\quad [ib,id]=[i][b,d]=[b,d].\qquad\square$$

共役の二重化 (Conjugation Doubling)：　(D

$$\overline{a+ib}=\overline{a}-ib\qquad(ib=-\overline{ib}=-\overline{b}\,\overline{i}=\overline{b}i)\ .$$

証明　$\overline{ib}=2[ib,1]-ib=-ib.$　□

---

4) ［訳注］ 共役の定義をそのまま 2 回施して計算しても得られる．

5) ［訳注］ この i のことを 10 章では二重化子 (doubler) とよんでいる．

組成の二重化 (Composition Doubling)：

$$(a+ib)(c+id) = (ac - d\bar{b}) + i(cb + \bar{a}d) \ .$$

証明 次の三つの等式から示される[6].

$$[a.id, t] \overset{\mathrm{C1}}{=} [id, \bar{a}t] \overset{\mathrm{M3}}{=} 0 - [it, \bar{a}d] \overset{\mathrm{C1}}{=} [t, i.\bar{a}d]$$

$$[ib.c, t] \overset{\mathrm{C1}}{=} [ib, t\bar{c}] \overset{\mathrm{D2}}{=} [\bar{b}i, t\bar{c}] \overset{\mathrm{M3}}{=} 0 - [\bar{b}\,\bar{c}, ti] \overset{\mathrm{C1}}{=} [\bar{b}\bar{c}.i, t] \overset{\mathrm{D2}}{=} [i.cb, t]$$

$$[ib.id, t] \overset{\mathrm{C1}}{=} -[ib, t.id] \overset{\mathrm{M3}}{=} 0 + [i.id, tb] \overset{\mathrm{C1}}{=} -[id, i.tb] \overset{\mathrm{M2}}{=} -[i][d, tb] \overset{\mathrm{C1}}{=} [-d\bar{b}, t].$$

□

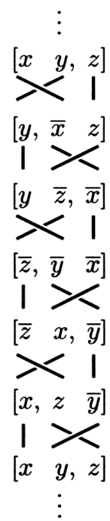


図 6.1 組紐法則に関連した 6 個の内積

6) [訳注] 結合律が満たされるとは限らないから，$(ab)c$ と $a(bc)$ とを区別する必要がある．そのために $(ab)c = ab.c$ という記法を用いる．さらに $((ab)c)d = (ab)c.d$ という記法も用いる．

6.4 フルビッツの定理の完成

前節で述べた法則が示していることは，組成代数 Z が真部分代数を含むときはいつでも，それはそのディクソンの二重化代数をも含んでいる，ということである．したがって，Z が有限次元ならば，それはその最小の部分代数である $\mathbb{R}$ から二重化を繰り返すことにより得られる．特に，Z はある代数 Y の二重化であり，Y はある代数 X の二重化であり，そしてそれが繰り返される．ここで，組成性質が存続できるのは高々 3 回の二重化操作に限られることを示そう．

まず，$Z = Y + i_Z Y$ **が組成代数になるのはどのようなときであろうか．**それは，すべての $a, b, c, d \in Y$ について

$$[a + i_Z b][c + i_Z d] = [(ac - d\bar{b}) + i_Z(cb + \bar{a}d)]$$

が成り立つときである．しかし，これを展開すると，

$$\begin{aligned}&[a][c] + [a][d] + [b][c] + [b][d]\\&\quad = [ac] - 2[ac, d\bar{b}] + [d\bar{b}] + [cb] + 2[cb, \bar{a}d] + [\bar{a}d]\end{aligned}$$

となるので，正確にはその答えは

$$[ac, d\bar{b}] = [cb, \bar{a}d]$$

であるとき，あるいはそれと同値なこと[7]であるが，

$$[ac.b, d] = [a.cb, d]$$

が成立[8]するときである．そして，これは，すべての $a, b, c \in Y$ について $ac.b = a.cb$ であるときに成り立つ．

したがって，答えは次のようになる．

補題 1. Z が組成代数となるのは，Y が結合的組成代数であるときである．

---

7) ［訳注］ 組紐法則を用いる．

8) ［訳注］ $ac.b$ は $(ac)b$ の意味である．

次に，$Y = X + i_Y X$ **が結合的組成代数となるのはどのようなときであろうか．**明らかに，X はこれらの性質をもっていなければならないが，すべての $b, c \in X$ に対して $i_Y b.c = i_Y.cb$ である[9]ことから，$bc = cb$ である必要があり，これはすなわち X が可換でなければならないことを意味する．

しかしいま，$a, b, c, d, e, f \in X$ に対して

$$\begin{aligned}(a + i_Y b)(c + i_Y d).(e + i_Y f) &= [(ac - d\bar{b}) + i_Y(cb + \bar{a}d)](e + i_Y f)\\ &= (ac - d\bar{b})e - f(\bar{b}\bar{c} + \bar{d}a) + i_Y[e(cb + \bar{a}d) + (\bar{c}\,\bar{a} - b\bar{d})f]\\ &= [ac.e - d\bar{b}.e - f.\bar{b}\bar{c} - f.\bar{d}a] + i_Y[e.cb + e.\bar{a}d + \overline{ca}.f - b\bar{d}.f]\end{aligned}$$

であり，そして同様に

$$\begin{aligned}(a + i_Y b).(c + i_Y d)(e + i_Y f) &= (a + i_Y b)[(ce - f\bar{d}) + i_Y(ed + \bar{c}f)]\\ &= a(ce - f\bar{d}) - (ed + \bar{c}f)\bar{b} + i_Y[(ce - f\bar{d})b + \bar{a}(ed + \bar{c}f)]\\ &= [a.ce - a.f\bar{d} - ed.\bar{b} - \bar{c}f.\bar{b}] + i_Y[ce.b - f\bar{d}.b + \bar{a}.ed + \bar{a}.\bar{c}f]\end{aligned}$$

である．そして，これらは X が可換かつ結合的であるならば一致する．

したがって，次を得る．

補題 2. X が可換な結合的組成代数であるとき，そしてそのときに限り，Y は結合的組成代数となる．

さらに，$X = W + i_X W$ **が可換な結合組成代数であるのはどのようなときであろうか．**$a, b, c, d, e \in W$ としよう．$ie = \bar{e}i$ であるから，すべての $e \in W$ に対して $e = \bar{e}$ である必要があり，いい換えると，W においては共役写像が自明であるということになる．

そして，

$$(a + i_X b)(c + i_X d) = (ac - d\bar{b}) + i_X(cb + \bar{a}d),$$

$$(c + i_X d)(a + i_X b) = (ca - b\bar{d}) + i_X(ad + \bar{c}b)$$

であり，これらは W の可換性と共役自明性を用いると一致する．したがって，次を得る．

---

[9] ［訳注］(D3) で $a = c = 0$ とすれば得られる．

補題 3. W が自明な共役写像をもつ可換な結合組成代数であるとき，そしてそのときに限り，X は可換な結合組成代数になる．

したがって最終的に，次が得られる．

定理 1. (Hurwitz) 組成代数は $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ および $\mathbb{O}$ だけである．

$\mathbb{R}$ は自明な共役写像をもつ可換な結合組成代数であり，よって，$\mathbb{C}$ は**非自明な共役写像**をもつ可換な結合的組成代数である．したがって，$\mathbb{H}$ は**非可換**な結合的組成代数であり，よって，$\mathbb{O}$ は**非結合的な**組成代数である．そして，そのディクソンの二重化は，もうすでに組成代数ではない．

以上で，実数上の単位元をもつ組成代数はこれら 4 つの代数のいずれかである，という Hurwitz の有名な定理が証明された．そこで，単位元をもたない代数に対してはイソトピーの範囲でそれが真であることを示そう．

任意の組成代数において，ノルム 1 の元 u および v を選んだとする．そのとき，$x \to xv$ および $y \to uy$ は直交写像であり，それらは逆写像 α および β をもつ．いま，新しい積を $x \star y = x^\alpha y^\beta$ で定義する．すると，

$$[x \star y] = [x^\alpha y^\beta] = [x^\alpha][y^\beta] = [x][y]$$

であり，これは $\star$ が組成代数を与えていることを示しており，さらに

$$uv \star uy = (uv)^\alpha (uy)^\beta = uy,$$

$$xv \star uv = (xv)^\alpha (uv)^\beta = xv$$

は uv がその新しい積に関する両側単位元であることを示している[10]．

---

[10] 次章の言葉を用いると，これは任意のノルム 1 の要素はイソトピーを施すことにより単位元に変換することができることを示しており，それによってモノトピー (monotopy) はそのような要素上で推移的となる (これは，モゥファン・ループ (Moufang Loop) であるための条件である)．

6.5 組成代数の他の性質

$x \neq 0$ に対して，$x^{-1} = \overline{x}/[x]$ と定める．

逆元法則 (inverse law)： $\overline{x}.xy = [x]y = yx.\overline{x}$,

あるいは同値的に $x^{-1}.xy = y = yx.x^{-1}$.

証明 $[\overline{x}.xy, t] = [xy, xt] = [x][y, t] = [[x]y, t]$. □

交代法則 (alternative law)： $x.xy = x^2y$, $yx.x = yx^2$.

証明 $\overline{x}.xy = \overline{x}x.y$ に $\overline{x} = 2[x, 1] - x$ を代入．□

注意：実際のところ，ブルック・クラインフェルド (Bruck-Kleinfeld) の定理 [8] は交代性質から代数を特徴づけている．ときには，$x.yx = xy.x$ は第 3 の交代法則とよばれる．次のいくつかの法則を証明した後に，それも証明しよう．

モゥファン法則 (Moufang law)： $xy.zx = x(yz).x = x.(yz)x$.

証明 $[xy.zx, t] = [xy, t.\overline{x}\,\overline{z}] = 2[x, t][y, \overline{x}\,\overline{z}] - [x.\overline{x}\,\overline{z}, ty]$

$$= 2[x, t][yz, \overline{x}] - [\overline{x}\,\overline{z}, \overline{x}.ty]$$

$$= 2[yz, \overline{x}][x, t] - [x][\overline{z}\,\overline{y}, t]$$

$$= 2[x, \overline{yz}][x, t] - [x][\overline{yz}, t].$$

したがって，$xy.zx = 2[x, \overline{yz}]x - [x]\overline{yz}$ は x および yz だけに関する関数である．それゆえ，y および z を同じ積をもつ任意の二つの要素に置き換えることができ[11]，

$$xy.zx = x(yz).1x = x(yz).x, \qquad xy.zx = x1.(yz)x = x.(yz)x$$

を得る．また，$y1 = 1y = y$ であることから，第 3 の交代法則

$$xy.x = xy.1x = x1.yx = x.yx$$

が得られる．□

11) [訳注] $y \to yz$, $z \to 1$ と置き換え，また，$y \to 1$, $z \to yz$ と置き換える．

$\mathbb{R}$ からディクソンの二重化を繰り返して得られるすべての代数は，$(ab)a = a(ba)$ および $(ab)a^2 = a(ba^2)$ を満たすという累乗結合的 (power associative) であり，また，任意の要素はある 2 次式を満たすという性質をもつことを R. D. Schafer が証明していると，W. D. Smith が知らせてくれた．彼はまた，八元数の "実部分 (real parts)" は結合的である ($[ab.c, 1] = [a.bc, 1]$) ということも述べている．

6.6 写像 L_x, R_x, B_x

結合法則が成り立たないことは，積演算操作についての考察が必要であることを示唆している．そこで，左乗算写像 L_x と右乗算写像 R_x と両側乗算写像 B_x とを

$$\mathrm{L}_x : y \to xy, \quad \mathrm{R}_x : y \to yx, \quad \mathrm{B}_x : y \to xyx$$

と定める．第 3 交代法則は，B_x の定義が整合的であり，それは両方の順序での L_x と R_x との積

$$y^{\mathrm{L}_x\mathrm{R}_x} = xy.x = y^{\mathrm{B}_x} = x.yx = y^{\mathrm{R}_x\mathrm{L}_x}$$

でもある，ということを示している．

B_x が反射による幾何的な解釈をもっているということも示しておくべきである．

$$xy.zx = 2[x, \overline{yz}]x - [x]\overline{yz}$$

という式を，x 方向の鏡映を表す通常の表現

$$\mathrm{ref}(x):\ t \to t - \frac{2[x,t]}{[x]}x$$

と比べると，

$$xy.zx = -[x](\overline{yz})^{\mathrm{ref}(x)} = [x](yz)^{\mathrm{ref}(1)\cdot\mathrm{ref}(x)}$$

となり，これは B_x がちょうど $\mathrm{ref}(1)\cdot\mathrm{ref}(x)$ のスカラー倍になっているということを示している．

結合法則について，もっと詳しくみてみよう．結合法則を次のような形

$$(yz)^{\mathrm{L}_x} = y^{\mathrm{L}_x}z\,, \qquad (yz)^{\mathrm{R}_x} = yz^{\mathrm{R}_x}$$

に書き表すと，これは，ある積への左あるいは右乗算は，その積のうちの一つの因子への左あるいは右乗算で行うことができる，ということを示している．さらに，モゥファンの両側乗算法則 $xy.zx = x(yz)x$ を $(yz)^{\mathrm{B}_x} = y^{\mathrm{L}_x} z^{\mathrm{R}_x}$ という形で書くと，これは，ある積への両側乗算は，二つの因子それぞれへの左乗算と右乗算とで行うことができる，ということを示している．

他に二つのモゥファン法則があるが，それらは通常

$$x(y.xz) = xyx.z\ , \qquad (yx.z)x = y.xzx$$

と書かれて使いにくいものになっている．そこで，これらと同値で，これらがどのように結合法則に代用するかが明らかな次の形 (“モゥファンの左右乗算法則”)

$$x(yz) = xyx.x^{-1}z\ , \qquad (yz)x = yx^{-1}.xzx$$

に書くことにしよう．というのは，これは次のように，左あるいは右乗算がその個々の因子にどのように乗算を実行することでなされるかを示しているからである：

$$(yz)^{\mathrm{L}_x} = y^{\mathrm{B}_x} z^{\mathrm{L}_{x^{-1}}}\ , \qquad (yz)^{\mathrm{R}_x} = y^{\mathrm{R}_{x^{-1}}} z^{\mathrm{B}_x}.$$

我々はまだ，この代数が二つの新しいモゥファン法則に従うことを示してはいない．次の章では，三つのモゥファン法則はすべて (逆元法則を用いて) 同値であるということを示すことで，それを示すことにする．

6.7 四元数と八元数の座標

ここで，それらの代数の古典的定義をディクソンの二重化を用いた我々の定義から復元するという問題に転じよう．1 に直交し，またお互いに直交している二つの単元 (i および j とする) は，$\mathrm{B}_i = \mathrm{ref}(1)\cdot\mathrm{ref}(i)$ が明らかに j を固定するから，$iji = j$ という性質を満たすことに注意する．すると，

$$ij = k \Rightarrow ki = j \quad (\text{同様に，} ij = k \Rightarrow jk = i)$$

である．また，

$$k^2 = ijij = jj = -1$$

かつ

$$ji = \overline{j}\,\overline{i} = \overline{k} = -k$$

となる．

もしも，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に拡大するときの単元を i にとり，j を次の拡大のときの単元とすると，ハミルトンの有名な関係式

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = 1, \\ ij = k \quad jk = i \quad ki = j, \\ ji = -k \quad kj = -i \quad ik = -j \end{gathered}$$

を得る．

八元数のためには，7 個の単元 $i_0, \ldots, i_6$ で，置換

$$\alpha : i_n \to i_{n+1}, \quad \beta : i_n \to i_{2n} \quad (\text{添字は 7 を法とする})$$

が乗算に関する対称性となるようなものをみつけなければならない．そのために，まずはじめの四元代数の単元を

$$i = i_1, \quad j = i_2, \quad k = i_4$$

と名づけて，i_0 をこれらの拡大に用いて $i_0 i_n = i_{3n}$ と定義して，

$$i_0 i_1 = i_3, \quad i_0 i_2 = i_6, \quad i_0 i_4 = i_5$$

となるようにする．

さて，もしも b, c が四元部分代数 $\langle 1, i_1, i_2, i_4 \rangle$ にあるとすると，$i_0 b.c = i_0.cb$ となることを思い起こそう．このことから

$$\begin{aligned} i_6 i_1 &= i_0 i_2.i_1 = i_0.i_1 i_2 = i_0 i_4 = i_5, \\ i_5 i_2 &= i_0 i_4.i_2 = i_0.i_2 i_4 = i_0 i_1 = i_3, \\ i_3 i_4 &= i_0 i_1.i_4 = i_0.i_4 i_1 = i_0 i_2 = i_6 \end{aligned}$$

が得られ，これは添字が

$$xyz = 124,\ 235,\ 346,\ 450,\ 561,\ 602,\ 013$$

であるような 7 つの “四元数三つ組” i_x, i_y, i_z 各々に対して，それがちょうどハミルトンの i, j, k のように振舞うということを示している．このような一般

的なシステムは

$$i_{n+1}, i_{n+2}, i_{n+4} \quad (\text{添字は 7 を法とする})$$

であるから，このことは我々の元の主張を立証していることになる．

6.8 八元数の対称性：二項結合性

以上の議論は，八元数の自己同型群に関する情報をも与えている．すなわち，1 に直交する任意の単元は i_1 としてとることができ，1 および i_1 に直交する任意の単元は i_2 としてとることができ，$1, i_1, i_2$ そして $i_1 i_2$ に直交する任意の単元は i_0 としてとることができるということである．

さらに詳しく述べると，j_1 を 1 に直交する任意の単元とし，j_2 を 1 および j_1 に直交する任意の単元とし，最後に j_0 を $1, j_1, j_2$ そして $j_1 j_2$ に直交する任意の単元とすると，$i_1 \to j_1$, $i_2 \to j_2$, $i_0 \to j_0$ と写すような自己同型写像がただ一つある．j_1 の選択は 1 に直交する 7 次元空間内の単位球面上の点であり，j_2 の選択は $1, j_1$ に直交する 6 次元空間内の単位球面上の点であり，j_0 の選択は $1, j_1, j_2, j_1 j_2$ に直交する 4 次元空間内の単位球面上の点である．これらの空間は次元が 6, 5, 3 の多様体であり，よって我々がみつけた対称性は，次元が $6+5+3=14$ の連続群をなす．リー群論の標準的な記法では，これはリー群 G_2 となる．G_2 については，8 章でさらに議論を行う．

ここで，G_2 を用いて八元数がもつアルティン (Artin) の "二項結合性 (di-associativity)" を証明する．

定理 2. 任意の八元数 2 個で生成される代数は結合的である．

八元数の対称性より，最初の一つを $x + i_1 y$，二つめを $X + i_1 Y + i_2 Z$ ととることができ，それら両方を四元部分代数 $\langle 1, i_1, i_2, i_4 \rangle$ 内に押し込めることができる．□

6.9 他の体上の代数

本書における主な関心は，実数体上の標準的な正定値 2 次形式 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ に対する組成代数である．しかしながら，この章にある証明は，ほとんど変更なしに標数 2 でない任意の体上の任意の非退化 2 次形式に対する組成代数の場合に適用することができる．

2 次形式 $[x]$ が**非退化**であるとは，対応する双線形形式が

$$\text{すべての } t \text{ に対して } [x,t]=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

を満たすときをいうことを思い出そう．これは，$[x,t]=[y,t]$ から $x=y$ であることを推論する我々の手法を正当化する．ただ一つの変更点は，H に直交するノルム 1 の要素がいつでもみつけられることを保証できない，ということである．したがって，拡大元 i は 0 でない任意のノルム α をとりうることが許されていなければならない．それは二重化法則を

$$(a+ib)(c+id)=(ac-\alpha d\bar{b})+i(cb+\bar{a}d)$$

と変えることであり，よって $[a+ib]=[a]+\alpha[b]$ となる．

標数 2 においても，議論は "本当に" 成立し，そこでは二重化は無限に続けられる (Albert [1] (そして Kaplansky [27] も) をみよ)．問題は代数にあるのではなく，2 次形式にある．それは，互いに直交するベクトル基底をみつける保証ができないということである．しかしながら，H の "ディクソンの二重化" は，H と直交していない i を用いてもなお定義できる．これは，単に式を複雑にするだけで，議論の構造には影響を及ぼさない．

これらのさらに一般化的な代数が標準的なものと異なっている一つの重要な点は，そこには逆元をもたない非零元が存在するかもしれないということである．すなわち，非退化 2 次形式であっても，非零元 x で $[x]=0$ であるものが存在しうる (実際のところ，有限体上では必然的に存在する) ということである．

6.10 1平方，2平方，4平方そして8平方恒等式

4つの代数 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ および $\mathbb{O}$ の存在は，N 平方恒等式

$$x_1^2\, y_1^2 = (x_1y_1)^2,$$

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2,$$

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)\\
&= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)^2\\
&\quad + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2\\
&\quad + (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)^2\\
&\quad + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x_\infty^2 + x_0^2 + \cdots + x_6^2)(y_\infty^2 + y_0^2 + \cdots + y_6^2)\\
&= (x_\infty y_\infty - x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6)^2\\
&\quad + (x_\infty y_0 + x_0y_\infty + x_1y_3 + x_2y_6 + x_4y_5 - x_3y_1 - x_6y_2 - x_5y_4)^2\\
&\quad + (x_\infty y_1 + x_1y_\infty + x_2y_4 + x_3y_0 + x_5y_6 - x_4y_2 - x_0y_3 - x_6y_5)^2\\
&\quad + (x_\infty y_2 + x_2y_\infty + x_3y_5 + x_4y_1 + x_6y_0 - x_5y_3 - x_1y_4 - x_0y_6)^2\\
&\quad + (x_\infty y_3 + x_3y_\infty + x_4y_6 + x_5y_2 + x_0y_1 - x_6y_4 - x_2y_5 - x_1y_0)^2\\
&\quad + (x_\infty y_4 + x_4y_\infty + x_5y_0 + x_6y_3 + x_1y_2 - x_0y_5 - x_3y_6 - x_2y_1)^2\\
&\quad + (x_\infty y_5 + x_5y_\infty + x_6y_1 + x_0y_4 + x_2y_3 - x_1y_6 - x_4y_0 - x_3y_2)^2\\
&\quad + (x_\infty y_6 + x_6y_\infty + x_0y_2 + x_1y_5 + x_3y_4 - x_2y_0 - x_5y_1 - x_4y_3)^2
\end{aligned}$$

の存在と同値である．

フルビッツの定理は，そのような恒等式

$$(x_1^2 + \cdots + x_N^2)(y_1^2 + \cdots + y_N^2) = z_1^2 + \cdots + z_N^2$$

で，z_k が x_i および y_j の双線形関数になっているものが存在するのは，$N = 1, 2, 4, 8$ のときに限る (そして，それらの場合に，それは上記のものの一つに “イソトピック” である) ということを示している．

6.11 多項平方恒等式：フィスター理論

これらを考慮すると，1967 年に A. Pfister [34] が証明した次の事実は大きな驚きであった.

定理 3. 任意の体において，また，すべての自然数 n に対して，任意に 2^n 個の平方の和を 2 つ選んだとき，それらの積はいつでも他の 2^n 個の平方の和になる.

彼は，N が 2 の累乗になっているときには (そして，標数が 2 でないなら，N が 2 の累乗のときに限り)，N 平方恒等式

$$(x_1^2 + \cdots + x_N^2)(y_1^2 + \cdots + y_N^2) = z_1^2 + \cdots + z_N^2$$

で，z_k が x_i および y_j に関する有理関数になっているものが存在する，ということを示した．実際には，z_k はいつでも x_i か y_j かのどちらかに関して線形にすることができる.

そのような恒等式がディクソンの二重化手続きの種々の変形によって生み出されるということは，一般に知られてはいないようである[12]．例えば，(順序のついた八元数の組 $a + ib$, $c + id$ に対して[13]) 16 平方恒等式が，"定義"

$$(a + ib)(c + id) = ab.b^{-1}c - d\bar{b} + i(cb + \bar{a}d)$$

$$(= X + iY \text{ とおく})$$

から得られる (ここで，$b = 0$ のときは "$ab.b^{-1}c$" を ac と解釈する).

この右辺のノルムは

$$[X] + [Y] = [ab.b^{-1}c] + [d\bar{b}] + [cb] + [\bar{a}d] - 2[ab.b^{-1}c, d\bar{b}] + 2[cb, \bar{a}d]$$

であるが，これは

$$[a][c] + [d][b] + [c][b] + [a][d] = ([a] + [b])([c] + [d])$$

と等しい．なぜならば，内積の項は

$$[ab.b^{-1}c, d\bar{b}] = [(ab.b^{-1}c)b, d] = [a.cb, d] = [cb, \bar{a}d]$$

[12] Pfister は最初に彼の恒等式をこのような形で得たわけではなかった.

[13] ［訳注］ a, b, c, d は八元数で，i は八元数を十六元数に拡張する拡張元である.

のようにキャンセルするからである．ここで，真ん中のステップはモゥファンの法則 (7 章)

$$(xy)z = xz^{-1}.zyz$$

を用いている．

これは，式

$$(a+ib)(c+id) = (ac - d\bar{b}) + i(cb + \bar{a}d)$$

の中の ac, $\bar{d}b$, cb, $\bar{a}d$ を置き換えて 16 平方恒等式をつくり出すたくさんの方法の一つにすぎない．この章の最初の補遺では，際限なく繰り返すことにより，任意の n に対して 2^n 平方恒等式をつくり出すことができるいくつかの方法を与えている．それらのうちの一つは，Warren Smith によって与えられた次式と同値である．

$$(a+bi)(c+di) = (ac - \overline{\bar{b}d}) + (b\bar{c} + b\overline{(\bar{a}.\overline{b^{-1}d})})i$$

Pfister は，平方の和および他の乗法的 2 次形式の全体的理論をつくり出すことを続けた．ここでの興味は，そのうちの容易な結果の一つに限ることにする．

定理 4. ある体 $\mathbb{F}$ において，-1 が N 個の平方の和として表されるとき，そのような最小の N (Pfister はそれを $\mathbb{F}$ の "Stufe" [14]とよんだ) は 2 の累乗である．

ここで，-1 が $2^n + k$ 個 $(0 < k < 2^n)$ の平方の和として

$$-1 = x_1^2 + \cdots + x_{2^n}^2 + y_1^2 + \cdots + y_k^2$$

と表されるが，それより少ない個数では表されない (よって，$x_1^2 + \cdots + x_{2^n}^2 \neq 0$) と仮定しよう．これを変形して

$$-(x_1^2 + \cdots + x_{2^n}^2) = y_1^2 + \cdots + y_k^2 + 1^2 = y_1^2 + \cdots + y_{2^n}^2$$

とおく[15]．そしてこの式に $s = x_1^2 + \cdots + x_{2^n}^2$ をかけて 2^n 平方恒等式を用いると，

$$-s^2 = (x_1^2 + \cdots + x_{2^n}^2)(y_1^2 + \cdots + y_{2^n}^2) = z_1^2 + \cdots + z_{2^n}^2$$

14) ［訳注］ Stufe は "段階，段級，音程" という意味のドイツ語．

15) ［訳注］ $y_{k+1} = 1$, $y_{k+2} = \ldots = y_{2^n} = 0$ である．

となるが，これは

$$-1 = (z_1/s)^2 + \cdots + (z_{2^n}/s)^2$$

を導くので矛盾である．

補遺 1：ディクソンの二重化法則について

ディクソンの二重化法則は，文献には次のような 2 通りの形で現れている．

$$(a+ib)(c+id) = (ac - d\bar{b}) + i(cb + \bar{a}d),$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})i.$$

これらを，“eyes-left” バージョンおよび “eyes-right” バージョンとよぶことにする．これらの式を憶えるために，eyes-left バージョンの中に出てくる文字の順序が $(a\ c\ b)$ と $(\bar{a}\ d\ \bar{b})$ とである (憶えやすくするために，一番左の a からはじめている) ことに注意しておこう．eyes-right バージョンについては，それは $(d\ a\ c)$ と $(\bar{d}\ b\ \bar{c})$ と (一番右の d からはじめている) となる．

八元数を “十六元数 (sedenions)” の 16 次元のシステムに拡張する式は，実数部分および虚数部分から 4 個の文字のうちの一つを “括り出す” ことにより，これらの式から得られる．すなわち，eyes-left システムにおいては，$(ac - d\bar{b})$ を

$$a(c - a^{-1}d.\bar{b}),\ \ (a - d.\bar{b}c^{-1})c,\ \ d(d^{-1}a.c - \bar{b}),\ \ (a.c\bar{b}^{-1} - d)\bar{b}^{-1}$$

のいずれかで置き換えるか，$(cb + \bar{a}d)$ を

$$c(b + c^{-1}\bar{a}.d),\ \ (c + \bar{a}.db^{-1})b,\ \ \bar{a}(\bar{a}^{-1}c.b + d),\ \ (c.bd^{-1} + \bar{a})d$$

のいずれかで置き換えるかである．

これらの乗算[16]は，4 個の左線形乗算 $\{x\}y$ と右線形乗算 $x\{y\}$ と (それらは

$$\overline{x\{y\}} = \{\bar{y}\}\ \bar{x}$$

16) [訳注] これらは双線形写像という性質を失っているが，その代わりにノルムに関して $N(xy) = N(x)N(y)$ という性質を得ている．

という式で関係している) からできているペア[17]になる．この，どちらの乗算を用いているかを表している記法は，括弧の中の任意の変数に関して線形であることを意味している．これらは，単に適切な変数を括弧でくくることによって，“任意元数 (anyions)” (すなわち，任意の n についての 2^n 元数) を与えるものに拡張する．例えば，次のようなものである：

$$(a+ib)\{c+id\} = a(\{c\} - a^{-1}\{d\}.\bar{b}) + i(\{c\}b + \bar{a}\{d\}).$$

この 4 個の乗算のペアはイソトピックである．例えば，i に x と y との積をかけたものは，ix と y とのもう一つの積である．

このような規則の広範な調査をした Warren Smith に感謝したい．

補遺 2：何が四元部分代数を固定するか

四元部分代数 H を保存する自己同型 (または “対称性”) は 4 章の言葉でうまく表現できる．通常どおりに，i を H に直交する単元として固定し，ディクソンの二重化の過程で行ったように，一般的な八元数を H 内の x, y を用いて $x+iy$ と表す．このとき，次が成り立つ．

定理 5. 八元数体の自己同型写像で H をそれ自身に写すようなものは，SO_4 と同型な群になる．その一般的なものは H の 2 個の単元でパラメトライズされた $[u,v]=[-u,-v]$ であり[18]，それは $x+iy \to \bar{u}xu + i.\bar{u}yv$ という写像になる．

証明 明らかに，H の任意の対称性は，H のディクソン二重化へ拡張する．すべてのそのような自己同型は SO_3 であり，$x \to \bar{u}xu$ と写すから，これは対称性

$$[u,u]:\ x+iy \to \bar{u}xu + i.\bar{u}yu$$

---

[17] ［訳注］ $\overline{a+ib} = \bar{a} - ib$ であることに注意して $(a+ib)\{c+id\} = a(\{c\} - a^{-1}\{d\}.\bar{b}) + i(\{c\}b + \bar{a}\{d\})$ の両辺の共役をとれば，$\{\bar{c} - id\}(\bar{a} - ib) = (\{\bar{c}\} - b.\{\bar{d}\}\bar{a}^{-1})\bar{a} - i(\{c\}b + \bar{a}\{d\})$ となる．ここで，$a \to \bar{c}$, $b \to -d$, $c \to \bar{a}$, $d \to -b$ のように変数を変換すると，$\{a+ib\}(c+id) = (\{a\} - d.\{\bar{b}\}c^{-1})c + i(\{\bar{a}\}d + c\{b\})$ となる．

[18] ここで $[u,v]$ は内積を表す記号ではなく，SO_4 の一般的な元を表すための以前の使い方にもどっている．

を与える．これらを法として，H を各点ごとに固定する対称性を考えるだけで十分である．もしもそのような対称性が i を I に写すとすると，それは $x+iy$ を $x+Iy$ と写すことになる．しかし，そのとき，H 内のある単元 v を用いて $I=iv$ と書くことができ，(D3) より $i.yv=iv.y$ であるから，

$$[1,v]: x+iy \to x+i.yv$$

がこの効果をもつことがわかる．

ちょうどいまみつけた，この二つのタイプの対称性 $[u,u]$ と $[1,v]$ とが，すべての対称性 $[u,v]$ を生成する．($[u,v]=[u,u][1,\overline{u}v]$ であるから．) □

三つの特殊な場合である $[u,1]$, $[1,v]$, $[u,u]$ は非常に特異な性質をもっている．もっとも重要なものは**準共役 (quasiconjugation)** $Q_u=[u,1]$ である．なぜそうなのかは，記号を変えることにより次のようにわかる．$X=x, Y=iy$ とおくと，((D3) より，$uY=u.iy=i.\overline{u}y$ であるから)

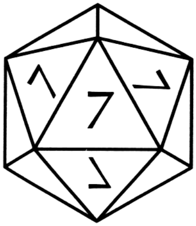
$$[u,1]: X+Y \to \overline{u}Xu+uY$$

であり，これは $[u,1]$ は i の選択には関係ないことを示している．しかしながら，それは u を含んでいる部分代数 H の選択に依存している．よって正確には，それは **部分代数 H に関する u による準共役**とよばれる．与えられた H について，H に関する準共役全体は，H を保存する自己同型群の正規部分群をなす．

H-安定化群 (H-stabilizer) $S_v=[1,v]$ はその次に重要である．その名前が意味するとおり，それらは H を各点ごとに固定し，それらはもう一つの正規部分群をなす．しかしながら，与えられた H 安定化群を記述する変数 v は，残念ながら，H と同様に i にも依存する．

対角的対称性 (diagonal symmetries) $D_u=[u,u]$ は，ある対称性が対角的であるとよばれるかどうかが他の対称性を適用すると変わってしまうので，あまり重要ではない．なぜならば，$[u,u]$ の $[a,b]$ による共役は $[u^a,u^b]$ であり，これはもうすでに対角的ではないからである．代数的には，これは対角的対称性は正規ではない部分群をなす，ということに対応している．

これらのアイディアは第 10 章で用いることにする．



モゥファン・ループ

7.1 インバース・ループ

インバース・ループ (**inverse loop**) は，特別な元 1，二項演算 xy そして逆元をとる演算 $\dashv$ をもつ集合で，

$$x1 = x = 1x,$$
$$x^{\dashv}(xy) = y = (yx)x^{\dashv},$$
$$(x^{\dashv})^{\dashv} = x$$

が，すべての x, y について満たされるものである．(ここで，逆元を，通常の x^{-1} ではなくて $x^{\dashv}$ と書いた理由はすぐにわかる[1])．

本章の主なテーマは，基本的な関係式 $xy = z$ は 6 通りの方法で書くことができる (図 7.1) ということである．それを，関係式の六つ組 (**hexad**) とよぶ．

いま，同値関係

$$yz^{\dashv} = x^{\dashv} \Leftrightarrow z^{\dashv}x = y^{\dashv}$$

は

$$(yz^{\dashv})x = 1 \Leftrightarrow y(z^{\dashv}x) = 1$$

と書くこともできるので，関係式 $(XY)Z = 1$ と $X(YZ) = 1$ とは同値であり，よって括弧を用いないで $XYZ = 1$ と書くことができる．

1) ［訳注］ 逆元をとるという操作を写像として書き表すときに，-1 では具合が悪い．

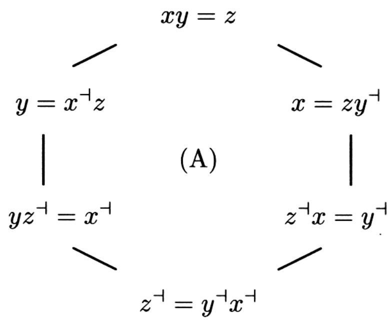


図 7.1　基本六つ組の 2 重形式

$xy = z$ および $xyz^{\dashv} = 1$ を，それぞれ同じ関係式の **2 重形式 (duplex form)** および **3 重形式 (triplex form)** とよぶ．図 7.1 にある 6 個の関係式を 3 重形式に (z を $z^{\dashv}$ に置き換えた後) 変換することは，それらの対称性の理解を簡単にしてくれる (図 7.2).

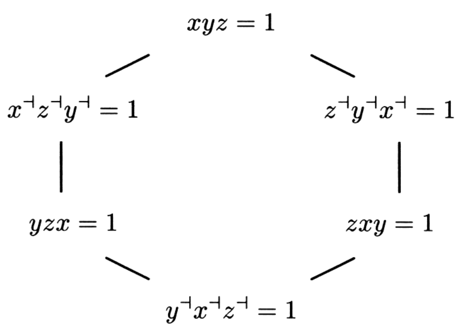


図 7.2　基本六つ組の 3 重形式

7.2 イソトピー

あるインバース・ループの**イソトピー (isotopy)** とは，この基本的な関係式を保つ可逆な写像の三つ組のことである．関係式が 2 重であるか 3 重であるかに応じて，次の二つの適切な記法を用いる．$(\alpha, \beta \mid \gamma)$ と書くことは $x^\alpha y^\beta = (xy)^\gamma$ を意味し，(α, β, γ) は $xyz = 1 \Rightarrow x^\alpha y^\beta z^\gamma = 1$ を意味する．

$(\alpha, \beta \mid \gamma)$ が 2 重形式のイソトピーであるとき，

$$xyz = 1 \Rightarrow xy = z^{\dashv} \Rightarrow x^\alpha y^\beta = z^{\dashv\gamma} \Rightarrow x^\alpha y^\beta z^{\dashv\gamma\dashv} = 1$$

は $(\alpha, \beta, \dashv\gamma\dashv)$ がその 3 重形式名であることを示している．

$$x^\alpha y^\beta = z^\gamma$$

$$x^{\dashv\alpha} z^\beta = y^\gamma \qquad\qquad z^\alpha y^{\dashv\beta} = x^\gamma$$

(B)

$$y^\alpha z^{\dashv\beta} = x^{\dashv\gamma} \qquad\qquad z^{\dashv\alpha} x^\beta = y^{\dashv\gamma}$$

$$y^{\dashv\alpha} x^{\dashv\beta} = z^{\dashv\gamma}$$

移項すると

$$x^\alpha y^\beta = z^\gamma$$

$$x^{\dashv\alpha\dashv} y^\gamma = z^\beta \qquad\qquad x^\gamma y^{\dashv\beta\dashv} = z^\alpha$$

(C)

$$x^{\dashv\gamma\dashv} y^\alpha = z^{\dashv\beta\dashv} \qquad\qquad x^\beta y^{\dashv\gamma\dashv} = z^{\dashv\alpha\dashv}$$

$$x^{\dashv\beta\dashv} y^{\dashv\alpha\dashv} = z^{\dashv\gamma\dashv}$$

図 7.3　イソトピー六つ組における移項

$(\alpha, \beta \mid \gamma)$ を関係式の六つ組 (A) に適用させると，同様の六つ組 (B) が得られるが，移項すると (C) となる (図 7.3)．このことは，$(\alpha, \beta \mid \gamma)$ がイソトピーならば，六つ組 (D) のすべてのメンバーもまたイソトピーであることを示している (図 7.4 をみよ)．(D) を 3 重形式 (E) に (γ を $\dashv\gamma\dashv$ に置き換えた後で) 変換することにより，対称性がよりはっきりとみてとれる．

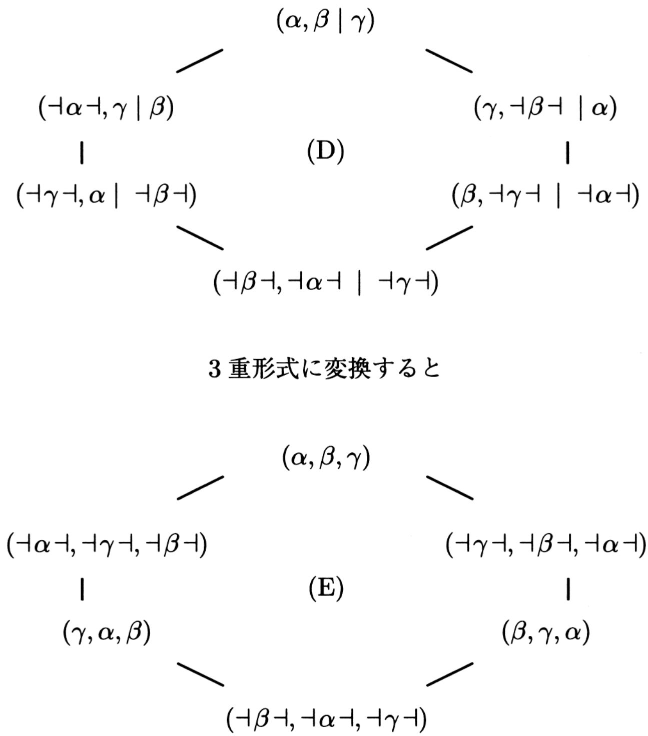


図 7.4　2 重形式および 3 重形式のイソトピー

7.3 モノトピーとそのコンパニオン

イソトピーの三つの写像の任意の一つを，**モノトピー** (**monotopy**) とよぶ．三つのうちのどれを選ぶかに関係なく同一の概念を得るということを，六つ組 (D) と (E) とは示している．

もしも γ がモノトピーであるならば，二つの写像 α, β があって

$$xy = z \Rightarrow x^\alpha y^\beta = z^\gamma$$

となる．特に，

$$z^\alpha 1^\beta = z^\gamma, \quad \text{よって } z^\alpha = z^\gamma 1^{\beta\dashv} = z^\gamma b,$$
$$1^\alpha z^\beta = z^\gamma, \quad \text{よって } z^\beta = 1^{\alpha\dashv} z^\gamma = a z^\gamma$$

である．これは γ がモノトピーになるのは，$(xy)^\gamma = x^\gamma b.ay^\gamma$ であるループ元 b と a とがあるときで，また，そのときに限ることを示している．この b と a とを γ の**コンパニオン** (**companion**) の組という．これは，イソトピーは自己同型に著しく類似している (自己同型は $1, 1$ をコンパニオンの組にもつモノトピーにすぎない) ということを示している．

一般に，上記の a と b との決定は，イソトピーの三つの写像は非常に密接に関連していることを示している．すなわち，左および右乗算

$$\mathrm{L}_a: \ x \to ax, \qquad \mathrm{R}_b: \ x \to xb$$

を用いて表すと，$\alpha = \gamma \mathrm{R}_b$，$\beta = \gamma \mathrm{L}_a$ となる．

さらに，次のことも成り立つ．(D) にある二つの同値なイソトピーの商

$$(\alpha, \beta \mid \gamma)^{-1} \cdot (\dashv\alpha\dashv, \gamma \mid \beta) = (\alpha^{-1}\dashv\alpha\dashv, \beta^{-1}\gamma \mid \gamma^{-1}\beta)$$

をとる．すると，$\gamma^{-1}\beta = \mathrm{L}_a$ であり $\beta^{-1}\gamma = (\mathrm{L}_a)^{-1} = \mathrm{L}_{a^\dashv}$ であることから，このイソトピーは特別な形

$$(\alpha^{-1}\dashv\alpha\dashv, \mathrm{L}_{a^\dashv} \mid \mathrm{L}_a)$$

をもつ．これを xa に適用すると，

$$a(xa) = x^{\alpha^{-1}\dashv\alpha\dashv}.a^\dashv a = x^{\alpha^{-1}\dashv\alpha\dashv}$$

を得る．

このことは，写像 $\alpha^{-1}\dashv\alpha\dashv$ は x を $a(xa)$ に写し，そして

$$a(xa).a^{\dashv}y = a(xy)$$

であることを[2)]，特に

$$a(xa).a^{\dashv} = ax, \quad したがって \quad a(xa) = (ax)a$$

であることを示している．

このことは，x を $a(xa) = (ax)a$ に写す写像を表す標準的な記号 B_a の使用を許容し，それを用いると我々のイソトピーは $(\mathrm{B}_a, \mathrm{L}_{a^{\dashv}} \mid \mathrm{L}_a)$ と表される．あらゆるイソトピーがそうであるように，それは 6 つの中の一つであり，

$$\dashv\mathrm{L}_a\dashv = \mathrm{R}_{a^{\dashv}}, \quad \dashv\mathrm{R}_a\dashv = \mathrm{L}_{a^{\dashv}}, \quad \dashv\mathrm{B}_a\dashv = \mathrm{B}_{a^{\dashv}}$$

を用いれば，その六つ組の全体は (F) となる (図 7.5)．この六つ組は a と $a^{\dashv}$ に関して対象であることから，次が証明される．

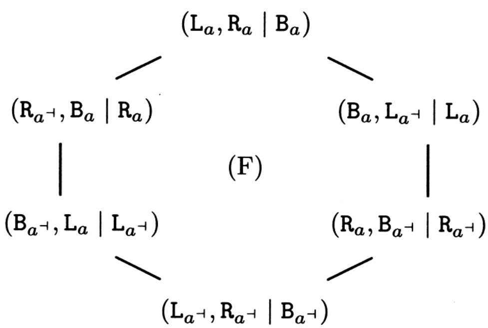


図 7.5 L_a, R_a, B_a を含むイソトピーの六つ組

定理 1. a が，あるモノトピーによる 1 の像であるとき，(F) に現れるすべてのイソトピーが存在し，そして L_a, $\mathrm{L}_{a^{\dashv}}$, R_a, $\mathrm{R}_{a^{\dashv}}$, B_a, $\mathrm{B}_{a^{\dashv}}$ はモノトピーである．特に，1 を a に写す任意のモノトピーがあるとき，L_a と R_a とがそのようなモノトピーである．

---

2) ［訳注］ xy にイソトピー $(\alpha^{-1}\dashv\alpha\dashv, \mathrm{L}_{a^{\dashv}} \mid \mathrm{L}_a)$ を施すと，$x^{\alpha^{-1}\dashv\alpha\dashv}a^{\dashv}y = a(xy)$ となる．

これは，モゥファンの法則の重要さを説明する次のような定理を導く．

定理 2. モノトピーはモゥファンの恒等式

$$zx.yz = z(xy)z$$

が成り立つときに，ちょうど推移的になる．

証明 そのとき，任意の z に対して $(\mathrm{L}_z, \mathrm{R}_z \mid \mathrm{B}_z)$ はイソトピーでなければならないからである．□

このようなループは**モゥファン・ループ (Moufang loop)** (または略して，"モゥプ (Moup)") とよばれる．

Martin Liebeck [31] は，群でない有限単純モゥファン・ループは，p を法とした八元数のノルム 1 の元からなるループに，スカラーを法として限られる，ということを示した．

7.4 モゥファン法則の異なる形式

xy に適用させることで，(F) の 6 個のイソトピーは三つの法則

$$z(xy)z = zx.yz \qquad \textbf{(両側) モゥファン法則},$$

$$z(xy) = zxz.z^{-1}y \qquad \textbf{左モゥファン法則},$$

$$(xy)z = xz^{-1}.zyz \qquad \textbf{右モゥファン法則}$$

に同値となる．ここで z は a か a^{-1} かのどちらかである．最後の二つの古典的な形式は少しだけ異なる：

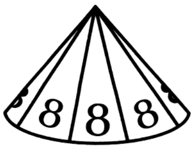
$$z(x(zt)) = zxz.t\,,$$

$$((tz)y)z = t.zyz\,.$$

これらは左および右モゥファン法則において $y = zt,\, x = tz$ とおくことで得られる．

モゥファン・ループは，ある射影平面の座標づけとの関係からそれらを発見した ([33] を参照) Ruth Moufang の名にちなんで名づけられている．しかし実際的な意味で，これはそれらが数学に現れた最初ではなかった．なぜならば，非零の実八元数は原型的なモゥファン・ループを構成するからである．事実，n 個の一般的な実八元数で生成されたループは実際には n 個の生成元上の自由な (free) モゥファン・ループである，ということが予想されている．

もちろん，モゥファンの恒等式は結合法則を弱めた形だとみなすことができる．実際，このことに関するもっとも有名な定理の一つはアルティン (Artin) の結合性定理：「任意の 2 生成モゥファン・ループは結合的である」である．しかしながら，抽象的モゥファン・ループを研究すことの理由は，これらの恒等式が対称性，すなわちモノトピーは推移的であること，と同値であるということである．我々は，このことをみてきたのであり，それらの理論のいくつか (特に，コンパニオンの性質) を次章で用いる．



八元数と 8 次元幾何

単位複素数または単位四元数をかけることでそれぞれ直交群 SO_2 または SO_4 を生成することはこれまででわかったが，本章ではそれに対応する結果である，単位八元数をかけることは SO_8 を生成するということを示す．

しかしながら，正当性によって制御されている[1)]場合，可換法則，結合法則が成立する場合，これら三つの場合の間には違いがある．単元 x および y に関する結合法則を

$$a^{\mathrm{L}_{xy}} = a^{\mathrm{L}_y \mathrm{L}_x}, \qquad a^{\mathrm{R}_{xy}} = a^{\mathrm{R}_x \mathrm{R}_y}$$

の形で表すとこれは，二つの乗算の積は同じ種類のものになるということであり，そしてそれが成立するときは，左および右乗算はそれぞれ特殊直交群のある部分群をなすことを示している．

複素数の場合には，交換法則を $a^{\mathrm{L}_x} = a^{\mathrm{R}_x}$ という形で表すと，これはこれらの群が同一であること，そして両方とも実際のところ群 SO_2 全体になることを意味している．四元数の場合には，左および右の群はそれぞれ真部分群となり，4 章でみたとおり，SO_4 の各々の元は各々の種類の乗算の積である．八元数においては結合法則は成り立たないので，同じ種類の二つの乗算の積が同じ種類の他のものである，ということはもう真ではない．本章では，実際には八元数の両方の種類の乗算は群 SO_8 全体を生成することをみる．

1) ［訳注］ 組成法則という意味であろう．

8.1 イソトピーと SO_8

まずはじめに，八元数は次のような意味で強く非結合的である，ということを示しておく．

定理 1. すべての八元数 x, y に対して $x(ry) = (xr)y$ であるならば，r は実数である．

$(i_1 i_0)i_2 = -i_1(i_0 i_2)$ であることから，もしも $(i_1 r)i_2 = i_1(ri_2)$ であるならば，r 内の i_0 の係数は 0 でなければならず，また，$i_n\,(1 \le n \le 6)$ に関しても同様に，$(i_{n+1}i_n)i_{n+2} = -i_{n+1}(i_n i_{n+2})$ であることから，その係数は 0 である．

このことは，コンパニオン (第 7 章) は本質的に一意的であることを導く．

定理 2. a, b がモノトピー γ に対するコンパニオンの組であるとき，他の組は $ar, r^{-1}b$ (r は実数) と表すことができる．

証明 A, B が二つめのコンパニオン組であるための条件は，等式

$$x^\gamma a.by^\gamma = x^\gamma A.By^\gamma \qquad (\text{すべての } x,\, y \text{ に対し})$$

が成り立つことである．$x^\gamma = X, y^\gamma = Y$ と書くと，この等式は

$$Xa.bY = XA.BY \qquad (\text{すべての } X,\, Y \text{ に対し})$$

となる．ここで，$A = ar$ とおき，$X = a^{-1}, Y = 1$ を代入すると，$b = rB$ すなわち $B = r^{-1}b$ となるから，等式は

$$Xa.bY = X(ar).(r^{-1}b)Y \qquad (\text{すべての } X,Y \text{ に対し})$$

となる．さらにここで，$Y = (r^{-1}b)^{-1} = b^{-1}r$ を代入すると $(Xa)r = X(ar)$ となり，$X = (ar)^{-1} = r^{-1}a^{-1}$ を代入すると $r^{-1}(bY) = (r^{-1}b)Y$ となり，さらに等式を変形すると

$$Xa.bY = (Xa)r.r^{-1}(bY) \qquad (\text{すべての } X,\, Y \text{ に対し})$$

となる．最後に，$Xa = x, bY = ry$ を代入すると，

$$x(ry) = (xr)y \qquad (\text{すべての } x, y \text{ に対し})$$

が得られるが，これは r が実数であることを示している．□

さて，SO_8 へ応用をする用意が整った．

定理 3. γ を SO_8 の任意の要素とするとき，SO_8 の元 α, β で $(\alpha, \beta \mid \gamma)$ がイソトピーであるようなものが存在する (したがって γ はモノトピーである)．さらに，この α, β は符号を無視して一意的に定まる．すなわちそのような他のペアは $-\alpha, -\beta$ だけである．

この定理を証明するために，次の補題を用いる．

補題 1. $\mathrm{ref}(1)\mathrm{ref}(a)$ および $\mathrm{ref}(a)\mathrm{ref}(1)$ は[2]単位八元数による両側乗算である．

証明 スカラー倍することで a のノルムを 1 としても，影響はない．そうするとき，前者は第 6 章にあった B_a であり，また後者は $\mathrm{B}_{a^{-1}} = \mathrm{B}_{\overline{a}}$ となる．□

定理の証明 次のように，γ を偶数個の鏡映の積として

$$\gamma = \mathrm{ref}(a_1)\mathrm{ref}(b_1)\mathrm{ref}(a_2)\mathrm{ref}(b_2)\cdots\mathrm{ref}(a_n)\mathrm{ref}(b_n)$$

と書くことができる．いま，

$$\mathrm{ref}(a_i)\mathrm{ref}(b_i) = \mathrm{ref}(a_i)\mathrm{ref}(1)\mathrm{ref}(1)\mathrm{ref}(b_i)$$

は単位八元数の二つの両側乗算による積であるので，γ は $2n$ 個のそのような単位両側乗算の積であり，それを $\mathrm{B}_{c_1}\mathrm{B}_{c_2}\cdots\mathrm{B}_{c_{2n}}$ としよう．すると，

$$(\alpha, \beta \mid \gamma) = (\mathrm{L}_{c_1}\cdots\mathrm{L}_{c_{2n}}, \mathrm{R}_{c_1}\cdots\mathrm{R}_{c_{2n}} \mid \mathrm{B}_{c_1}\cdots\mathrm{B}_{c_{2n}})$$

が求めるイソトピーとなる．($c_1, \ldots, c_{2n}$ は単位八元数であるので，α および β は実際に SO_8 に入っている．) しかし，α および β はスカラー倍を除いて一意的であり，またそれらを SO_8 内に止める唯一の非自明なスカラーは -1 であるので，そのような唯一の他のイソトピーは

$$(-\alpha, -\beta \mid \gamma) = (\alpha, \beta \mid \gamma)$$

である．□

---

[2] ［訳注］ $\mathrm{ref}(a)$: $t \to t - \frac{2[a,t]}{[a]}a$ は，a を $-a$ に写す鏡映．

8.2 直交イソトピーとスピン群

前述の議論では，2 重形式のイソトピー $(\alpha, \beta \mid \gamma)$ を用いることが便利であった．しかし，トリアリティ (triality) に取り組むときには，3 重形式 (α, β, γ) に取り替えたほうが便利であり，先ほど発見したイソトピーは

$$(\mathrm{L}_a\mathrm{L}_b\cdots,\ \mathrm{R}_a\mathrm{R}_b\cdots,\ \mathrm{B}_{\overline{a}}\mathrm{B}_{\overline{b}}\cdots)$$

のような形になる．

イソトピー (α, β, γ) が**直交イソトピー** (**orthogonal isotopy**) であるとは，その三つのモノトピー α, β, γ が SO_8 の要素であるときをいう．以上で示したことは，直交イソトピーの群は SO_8 の 2-対-1 の被覆であることであり，それは**スピン群** (**spin group**) Spin_8 とよばれる．スピン群の通常の定義をよく知っている読者は，これはその一つの例であるとわかるであろう．しかし，第 3 章で注意したように，本書においては一般的な定義を与えることは避けるようにしている．

8.3 トリアリティ (Triality)

我々のスピン群の定義によると，次のことは明らかである．

定理 4. スピン群は，位数 3 の外部自己同型写像 $(\alpha, \beta, \gamma) \to (\beta, \gamma, \alpha)$ をもつ．

証明 これは明らかに自己同型である．これが外部自己同型であること (すなわち，共役写像 $g \to h^{-1}gh$ ではないこと) は，トリアリティ関係にある要素

$$(\mathrm{L}_{i_0}, \mathrm{R}_{i_0}, \mathrm{B}_{i_0} = \mathrm{B}_{\overline{i_0}})\ \text{および}\ (\mathrm{R}_{i_0}, \mathrm{B}_{i_0}, \mathrm{L}_{i_0})$$

の像 B_{i_0} と L_{i_0} とは互いに共役ではない (B_{i_0} は 6 次元空間を固定するが，L_{i_0} は固定点をもたない) ことから明らかである．□

特殊直交群 SO_8 はこのトリアリティをもたない．なぜなら，γ が α と β とを (符号を無視すると) 一意的に定めるからである．しかしながら，次が成立する．

定理 5. 射影的特殊直交群 PSO_8 はトリアリティ自己同型をもつ.

特殊直交群の要素 $\varphi \in SO_8$ に対して，$[\varphi] = \{+\varphi, -\varphi\}$ と定めて $[\varphi] \in PSO_8$ であるようにする．すると，直交イソトピー (α, β, γ) から生じる三つ組 $([\alpha], [\beta], [\gamma])$ の集合は明らかに（$[\gamma]$ は $[\alpha]$ と $[\beta]$ とを一意的に定めるから）PSO_8 と同型であり，そしてトリアリティ

$$([\alpha], [\beta], [\gamma]) \to ([\beta], [\gamma], [\alpha])$$

をもつ.

PSO_8 上へ作用するとき，トリアリティはすべての単位八元数 u に対して

$$[\mathrm{L}_u] \to [\mathrm{R}_u] \to [\mathrm{B}_{\overline{u}}] \to [\mathrm{L}_u]$$

と写す.

8.4 7 個の右で左を作れる

トリアリティからの直接の帰結の一つは次である.

定理 6. SO_8 は単位八元数の左乗法で生成される．右乗法でも同様である.

証明 SO_8 は両側乗算で生成されるので，トリアリティを施すことにより，同様に，左もしくは右乗算でも生成される．□

特に，左乗法は右乗法の積で表すことができ，また逆もしかりである．与えられた L_x を表すためには何個の右乗算が必要であろうか．その答えは次で与えられる.

定理 7. (7 乗算定理) SO_8 任意の要素は高々 7 個の右 (あるいは 7 個の左) 乗算の積である.

この 7 という個数は最善である.

定理 8. 一般的な左乗算は 7 個の右乗算の積であり，それ未満ではない.

証明 $\alpha \in SO_8$ とすると，$\mathrm{ref}(1) \cdot \alpha \in GO_8 \setminus SO_8$ であり，それは高々 7 個の鏡映の積であるので

$$\alpha = \mathrm{ref}(1)\mathrm{ref}(u_1)\mathrm{ref}(u_2)\dots\mathrm{ref}(u_7)$$

であるが，

$$\mathrm{ref}(u)\mathrm{ref}(v) = \mathrm{ref}(u)\mathrm{ref}(1)\mathrm{ref}(1)\mathrm{ref}(v) = \mathrm{B}_{\overline{u}}\mathrm{B}_v$$

を用いると，これは 7 個の両側乗算の積で

$$\alpha = \mathrm{B}_{u_1}\mathrm{B}_{\overline{u_2}}\mathrm{B}_{u_3}\mathrm{B}_{\overline{u_4}}\mathrm{B}_{u_5}\mathrm{B}_{\overline{u_6}}\mathrm{B}_{u_7}$$

と表される．したがって，トリアリティにより，α は 7 個の左乗算の積か 7 個の右乗算の積である．特に，任意の左乗算は 7 個の右乗算の積であり，例えば

$$\mathrm{L}_{i_0} = \mathrm{R}_{i_{2\bar{6}\overline{45}}}\mathrm{R}_{i_{2\bar{6}4\bar{5}}}\mathrm{R}_{i_6}\mathrm{R}_{i_5}\mathrm{R}_{i_{\infty\overline{01}3}}\mathrm{R}_{i_{\infty 0\bar{1}3}}\mathrm{R}_{i_3}$$

かつ

$$\mathrm{L}_{i_{\infty 365}} = \mathrm{R}_{i_0}\mathrm{R}_{i_{\bar{0}1\overline{24}}}\mathrm{R}_{i_{01\bar{2}4}}\mathrm{R}_{i_{\overline{0124}}}\mathrm{R}_{i_{\infty\overline{64}1}}\mathrm{R}_{i_{\infty 51\bar{2}}}\mathrm{R}_{i_{\infty\overline{32}4}}$$

となる (これは 9 章で使うことになる).

他方，u が ± 1 以外の単元であるとき，L_u は 6 個の右乗算の積では書けない．もしそうであれば，それは対応する 6 個の両側乗算の積，すなわち 6 個の鏡映の積になり，あるベクトルを固定することになるが，しかし L_u はそうではない.

正のスカラー因子は 3 種類すべての乗算に吸収されるので，単元に制限する必要はなく，L_x が 6 個の右乗算の積となるのは x が実数であるときに限られる.

□

8.5 他の乗算定理

乗算の積においてタイプが混合していた場合，何が起こるであろうか．X, Y, Z を記号 L, R, B から選んだものとするとき，例えば XYZX を $X_aY_bZ_cX_d$ $(a, b, c, d$ は単位八元数) の形で表される SO_8 の要素全体と定める．

定理 9. 次のタイプの集合は，それぞれ下段に記された次元をもつ．

X	XX	XXX	XXXX	XXXXX	XXXXXX	XXXXXXX
7	13	18	22	25	27	28

XY	XXY	XXXY	XXXXY
14	20	25	28

証明 八元数の共役は L と R とを入れ替えて B を固定し，トリアリティは L, R, B を回転させるので，X = B かつ Y = R と仮定してもよい．定理の 1 行めは，n 個の B の積の集合は n が偶数ならば n 個の鏡映の積の集合であり，n が奇数ならばそれに ref(1) をかけたものである，という事実から導かれる[3]．

次に，XY, XXY, XXXY の次元はそれぞれ X, XX, XXX の次元よりも 7 だけ大きいことを示そう．これは，次の等式

$$B_aB_bB_cR_d = B_{a'}B_{b'}B_{c'}R_{d'}$$

は $d = d'$ を意味している (そして，$B_aB_bB_c = B_{a'}B_{b'}B_{c'}$) という事実から直ちに導かれる．その事実の理由は，この等式は $R_{d'}R_{\overline{d}}$ が BBBBBB に属していることを意味し，よってそれはある 2 次元空間を固定するので，$e \neq 0$ をこの 2 次元空間内の要素すると，$(ed')\overline{d} = e$ であり $ed' = ed$ となるが，これは実際 $d' = d$ を意味するからである．

同様の等式

$$B_aB_bB_cB_dR_e = B_{a'}B_{b'}B_{c'}B_{d'}R_{e'}$$

は，自明である

$$R_{e'}R_{\overline{e}} \in BBBBBBBB$$

[3] [訳注] 8 次元ベクトル空間内の 1 次独立な n 個の単位ベクトルの組の全体がなす空間の次元に等しい．

ということしか導かず，それは $e' = e$ であることを意味しない．しかしながら，BBBBR の次元 (それは 29 ではなく 28) をそのような同値関係の集合の次元を数えることにより計算できる．しかし，詳細は略する．□

多数の他の混合された積は，次の補題を用いることにより簡約化される．

補題 2.

$$\mathrm{LR} = \mathrm{RB} = \mathrm{BL},$$
$$\mathrm{RL} = \mathrm{LB} = \mathrm{BR}$$

が成立する．

例えば，これらは BLL = LRL = LLB を導き，それは (2 通りの方法で) LRL の次元が 20 であることを示している．

証明 恒等式

$$\mathrm{L}_a\mathrm{R}_b = \mathrm{R}_{b\overline{a}}\mathrm{B}_a = \mathrm{B}_b\mathrm{L}_{a\overline{b}},$$
$$\mathrm{R}_a\mathrm{L}_b = \mathrm{B}_b\mathrm{R}_{\overline{b}a} = \mathrm{L}_{\overline{a}b}\mathrm{B}_a$$

はモゥファンの法則から従う．□

この定理で言及されていない長さが高々 4 の唯一の集合は XXYY であり (LLRR, RRLL, RRBB, BBRR, BBLL, LLBB は補題 2 より，実際にはすべて同じ集合である)，一方，長さが 5 以上の集合はおそらく群全体となる．そこで次が予想される．

5 乗算予想 V, W, X, Y, Z を L, R, B から選んだ 5 個の記号で “すべて等しい” ものではないとするとき，集合 VWXYZ は SO_8 のすべての要素を含む．

先ほどの補題は，すべての場合は XXXXY に簡約化されることを示しており，それは全次元 28 をもっているということはすでにわかっている．よって，わかっていないことはわずかである．

8.6 3 個の 7 次元群が 1 個の 8 次元群内にある

スピン群 Spin_8 と特殊直交群 SO_8 との間の関係を理解する最良の方法は，三つ組をその最後の座標に写す，次の 2-対-1 写像

$$\begin{array}{ll} (\alpha, \beta, \gamma) & \searrow \\ & \quad \gamma \\ (-\alpha, -\beta, \gamma) & \nearrow \end{array}$$

を通して考えることである．専門的な表現でいえば，これは Spin_8 の 8 次元表現である．

7 次元スピン群 Spin_7 は SO_7 のこの写像による逆像であり，γ が 1 を固定するような三つ組 (α, β, γ) は Spin_7 と同型な群をなす．明らかに，その代わりに α あるいは β が 1 を固定することを要求することによって，さらに二つの Spin_7 と同型な群が Spin_8 内に得られる．

これらの群はすべて，上記のように一つに制限する[4]ことによって得られる 8 次元表現をもつが，それら三つの表現は非常に異なっている．それらの一つ (前者) は可約 (なぜならば 1 を固定するから) であり，しかも忠実でない (なぜならば $(-1, -1, 1)$ がその核に入っているから)．他の二つ (後者) は両方とも既約であり忠実である．なぜならば，一方ではその核にある非自明な要素 $(-1, -1, 1)$ は後者二つの群のどちらにも属しておらず，そして他方では，それらは単位球体上で推移的であるからである．実際，イソトピー

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\mathrm{R}_{\overline{u}}, \mathrm{B}_u, \mathrm{L}_{\overline{u}})(\mathrm{B}_{\overline{u}}, \mathrm{L}_u, \mathrm{R}_u)$$

を考えると，$\gamma : x \to \overline{u}xu$ は 1 を固定するが，α および β は $1 \to \overline{u}^3$ および u^3 と写し，それらは任意の単位八元数となりえるのである．

定理 10. Spin_8 内の Spin_7 と同型なこれら 3 個の群のうちの任意の 2 個の共通部分は，3 個全部の共通部分でもある．また，これは八元数の自己同型群である．

[4] ［訳注］ 三つ組の最後の一つの座標に写すこと．

証明　α, β, γ を等式 $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ に施すと $1^\alpha 1^\beta 1^\gamma = 1$ となるが，これは α, β, γ のうちのどれか二つが 1 を固定するならば，3 個全部が固定するということを意味している．いま，a と b とが γ のコンパニオンである，すなわち $\alpha = \gamma \mathrm{R}_a$, $\beta = \gamma \mathrm{L}_b$ であるとすると，$a = b = 1$ となり，これは γ が同型写像であることを示している．□

これは通常 G_2 とよばれているリー群である．これは 5 つの "例外" リー群の中で最小のものである．

図 8.1 は，これまでに言及した群の間の関係を図示している．グラフの線を下に降りるためには，α, β, γ のいずれかが 1 を固定することが要求される．(それは 1 を単位 7 次元球面上の任意の点に写すことができる，ということから，これは次数を 7 だけ減じることになる．)

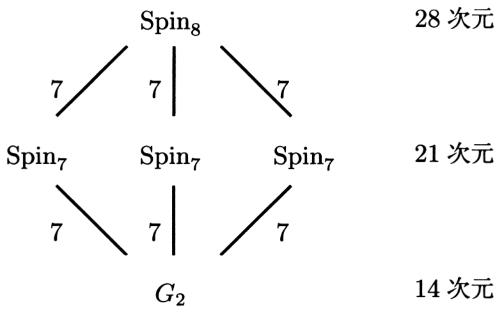


図 8.1　八元数の自己同型群 G_2 は Spin_8 内の任意の 2 個の Spin_7 の共通部分である．

Spin_8 の要素は，

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha, -\beta, -\gamma), \quad (-\alpha, \beta, -\gamma), \quad (-\alpha, -\beta, \gamma)$$

という，Spin_8 の中心の要素

$$(1, 1, 1), \quad (1, -1, -1), \quad (-1, 1, -1), \quad (-1, -1, 1)$$

による乗算によって互い関連する四つ組を作る．SO_8 上への写像 $(\alpha, \beta, \gamma) \to \gamma$ は，次のような 2 通りの融合によって，対称性を不明瞭にする：

$$\begin{array}{r} (\alpha,\beta,\gamma) \searrow \\ (-\alpha,-\beta,\gamma) \nearrow \end{array} \gamma, \qquad \begin{array}{r} (\alpha,-\beta,-\gamma) \searrow \\ (-\alpha,\beta,-\gamma) \nearrow \end{array} -\gamma.$$

しかし，γ と $-\gamma$ とを同一視して $[\gamma]$ とした PSO_8 へ写すことにより，それを回復させることができる：

$$\begin{array}{r} (\alpha,\beta,\gamma) \searrow \\ (-\alpha,-\beta,\gamma) \nearrow \end{array} [\gamma] \begin{array}{l} \swarrow (\alpha,-\beta,-\gamma) \\ \nwarrow (-\alpha,\beta,-\gamma). \end{array}$$

よって，Spin_8 および PSO_8 は SO_8 にはなかったトリアリティ対称性をもつ．このことについて，次節ではさらに議論する．

8.7 コンパニオンについて

本章と前章のいろいろな結果をまとめると，次が得られる．

定理 11. 与えられた要素 $\gamma \in SO_8$ に対して，**コンパニオン (companion)** とよばれる単位八元数の組 a, b があり，

$$(xy)^\gamma = x^\gamma a.by^\gamma$$

となる．コンパニオンは -1 倍を除いて一意的に定まり，他の組は $(-a,-b)$ だけである．

コンパニオンの "乗法法則" をみつけることは困難ではない．

定理 12. γ および δ のコンパニオンをそれぞれ a, b および c, d とするとき，$\gamma\delta$ のコンパニオンは $cd.a^\delta c$, $db^\delta.cd$ である．

証明

$$\begin{aligned} (xy)^{\gamma\delta} &= (x^\gamma a.by^\gamma)^\delta \\ &= (x^\gamma a)^\delta c.d(by^\gamma)^\delta \\ &= (x^{\gamma\delta}c : da^\delta)c.d(b^\delta c : dy^{\gamma\delta}) \\ &= (x^{\gamma\delta} : c(da^\delta)c)(d(b^\delta c)d : y^{\gamma\delta}) \\ &= (x^{\gamma\delta} : cd.a^\delta c)(db^\delta.cd : y^{\gamma\delta}). \end{aligned}$$

最初の三つの等式はコンパニオンの定義からであるが，残りの二つはモゥファンの法則を用いている．□

これらを，左，右そして両側乗算の任意の組合せに対してそのコンパニオンをみつけるために用いる．まず次からはじめる．

定理 13. L_a, R_a, および B_a のコンパニオンはそれぞれ

$$a, a^{-2} \qquad a^{-2}, a \qquad a^{-1}, a^{-1}$$

である．

証明

$$\begin{aligned} a(xy) &= axa.a^{-1}y = ax.a : a^{-2}.ay, \\ (xy)a &= x^{-1}a.aya = xa.a^{-2} : a.ya, \\ a(xy)a &= \quad ax.ya \quad = axa.a^{-1} : a^{-1}.axa \end{aligned} \qquad \square$$

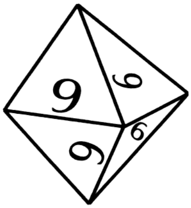
群論において，写像 $\mathrm{T}_a : x \to a^{-1}xa$ は a による**変換 (transformation)** あるいは**共役 (conjugation)** とよばれ，自己同型写像を引き起こすものとして重要である．八元数においては，それは一般には真ではないが，(Zorn [44] によって) そのようになるすべての場合がわかっている：

定理 14. T_a が自己同型写像であるのは，ちょうど a^3 が実数であるときである．

証明 次の式は T_a がコンパニオン a^{-3}, a^3 をもつことを示している (最後の等式は 2 重結合性を 2 回用いている)：

$$\begin{aligned} a^{-1}(xy)a &= a^{-1}xa^{-1}.ay : a \\ &= a^{-1}xa^{-1}.a^{-1} : a(ay)a \\ &= a^{-1}xa.a^{-3} : a^3.a^{-1}ya. \end{aligned}$$

特に T_ω (ここで，$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i_1 + \frac{1}{2}i_2 + \frac{1}{2}i_4$) は八元数の自己同型であり，次章で定義する整数的なものにおいてもそうである．□



八元整数 O

本章では，まず最初に“整数的八元数”を定義する正しい方法をみつけ，そして，それらが構成する非常に興味深い格子 E_8 の幾何について詳細に調べる．また，“八元整数”のなす環 $\mathsf{O} = \mathsf{O}^8$ はユークリッドの性質 (より小さな剰余をもつ割り算ができること) をもつことを導き出す．残念ながら，このことはイデアルと一意分解性とに関する期待される理論を導くことはない．なぜなら，後で示すことであるが，O のイデアルはほとんど自明であるからである．最後に，はじめて本書に登場する新しい理論によって，八元整数の約数に関する算術と幾何の両方を解明する．それは，H.P. Rehm によるユークリッドのアルゴリズムの興味ある新しい形の発見によって促されたものである．

O の要素は“ケイリー整数 (The Integral Cayley Numbers)”ともよばれているが，それは Coxeter の論文 [11] のタイトルに由来する．後年 Coxeter は，“(その論文を) 書く前に F. van der Blij の ‘History of the octaves’ [42] を読んでいたならば，そのタイトルを ‘Integral Octaves’ としていたであろう”と言っている．しかしながら，“octonions”という用語もいまや標準的なものになってきたようである．妥協の方法として“octavian”を (“Hurwitzian”の類似語として) “octonion integer”を意味する言葉として用い，そして Graves へのさらなる敬意を込めて，“Gravesian”を“Lipschitzian”の類義語として用いることを提案したい．

9.1 整数性の定義

第 5 章で述べた Lipschitz と Hurwitz とによる 2 種類の四元整数の概念を思い出し，**八元整数**は何を意味するべきかを問いかけてみよう．今日では，代数学者は “整数 (integer)” という言葉は，Dickson (彼は，arithmetic という用語を使った) にならって，**極大整環 (maximal order)** とよばれるもののメンバーを意味するものとしてとらえている．

この**整環 (order)** という概念は，代数的数体 (すなわち有理数体の有限次代数拡大) に現れた．そこでは “部分環でその各々の要素が

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 = 0 \qquad (c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{Z})$$

という形の等式を満たすもの” を意味する．Dickson は**算術 (arithmetic)** を極大な整環であると定義した．

例えば，$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ においては $a + b\sqrt{-3}$ は $x^2 - 2ax + (a^2 + 3b^2) = 0$ を満たし，集合 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ($a, b \in \mathbb{Z}$ である $a + b\sqrt{-3}$ からなるもの) は確かに整環である．しかしながら，アイゼンシュタイン整数 ($2a, a + b \in \mathbb{Z}$ であるもの) のなすさらに大きな環もまた整環であり，したがって $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ は**極大**整環ではなく，すなわち算術でない．

有理八元数の “環” $\mathbb{Q}(i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ は非結合的ではあるが，我々は同じ用語を用いることとする．$\alpha = a_\infty + a_0 i_0 + \cdots + a_6 i_6$ の最小多項式は

$$x^2 - 2a_\infty x + (a_\infty^2 + a_0^2 + \cdots + a_6^2) = 0$$

であるから，$\mathbb{Q}(i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ 内の整環もしくは算術の要素であるための条件は，“トレース (trace)” $2a_\infty$ と “ノルム (norm)” $a_\infty^2 + a_0^2 + \cdots + a_6^2$ とが通常の整数でなければならないということである．

9.2 八元整数に向かって

$\mathbb{Q}(i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ 内のもっとも明らかな整環は，すべての座標 $a_\infty, \ldots, a_6$ が通常の整数である八元数からなるものである．我々はそれを**グレイヴス八元整数 (Gravesian octaves)** あるいは**グレイヴス整数 (Gravesian integers)** とよぶ．本節では，次のことを証明する．

定理 1. グレイヴス整数を含む整環は，図 9.1 にある 16 個の整数システムだけである．

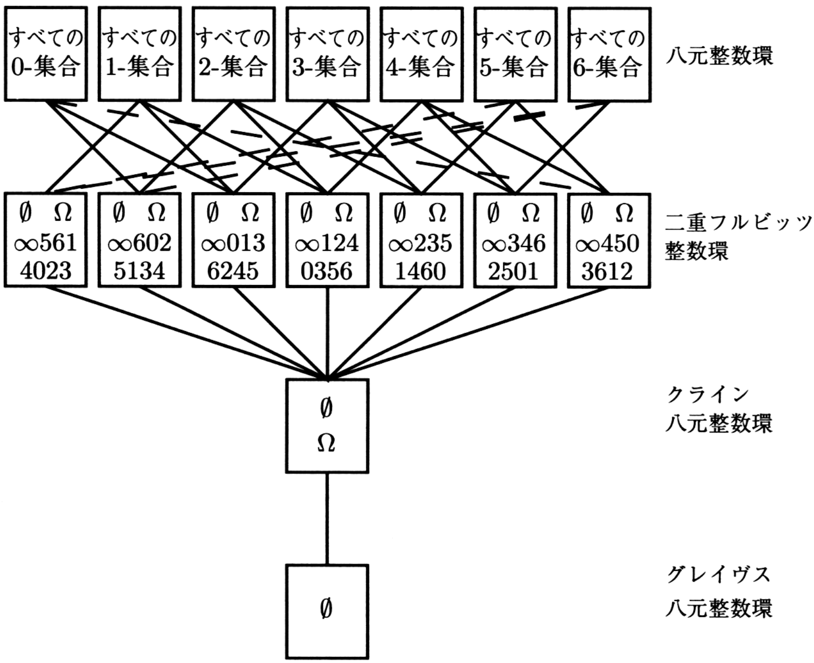


図 9.1 グレイヴス八元整数 G^8 を含む 16 個の整環

この後，我々にはその座標が $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に入っているような八元整数 α を参照する多くの機会がある．この場合，$\mathbb{Z}$ には入っていないような座標の添字を集めた集合を，**半整添字集合 (halving-set)** とよぶことにする．

補題 1. そのような整環の要素 α に対して，α の各々の座標の 2 倍 $2a_r$ は整数であり[1)]，その半整添字集合のサイズ m は 4 の倍数である．

証明 最初の主張のためには，α に i_r をかければよい．2 番目の主張のためには，

$$a_\infty^2 + \cdots + a_6^2 \equiv \frac{m}{4} \pmod 1$$

をみればよい．□

この補題を考慮して，次の記号を導入する．

$$i_{abcd} = \frac{i_a + i_b + i_c + i_d}{2}$$

また，添字にバーを用いるのは，それにマイナスを付けること，例えば

$$i_{a\bar{b}c\bar{d}} = \frac{i_a - i_b + i_c - i_d}{2}$$

を意味することとする．

この 16 個のシステムの中から一つを特定することは，その半整添字集合が何であるかを指定することでできる．八元数の乗算の構造には，すでに添字の四つ組の際だった族が関係している．すなわち，四元部分代数に対応する添字，それにそれらの補集合である．これらに空集合と全集合とをあわせた 16 個の集合を，**∞-集合**とよぶ：

$$\begin{array}{cccccccc} \emptyset & \infty124 & \infty235 & \infty346 & \infty450 & \infty561 & \infty602 & \infty013 \\ \Omega = \infty0123456 & 0356 & 0146 & 0125 & 1236 & 0234 & 1345 & 245. \end{array}$$

八元数で，その半整添字集合がある ∞-集合であるものを "**∞-整数**" あるいは J. Kirmse にちなんで "**キルムス整数 (Kirmse integer)**" とよぶ．彼は，自然に，しかし誤ったことに，それらが極大整環をなすと仮定してしまった[2)]．

しかし，Coxeter は

∞-整数は乗法的に閉じていない

---

1) ［訳注］ $\alpha = a_\infty + a_0 i_0 + \cdots + a_6 i_6$

2) 他の者もこの非常に自然な仮定を用いてしまったので，これに標準的な名前 "キルムスの誤り (Kirmse's Mistake)" をつけると便利である．無作為に選ばれた二つのキルムス整数の積が偶然キルムス整数になる確率は，3 分の 1 ほどである．

ということをみつけた．例えば，二つの ∞-整数である $i_{\infty 026}$ と $i_{\infty 013}$ との積は i_{0235} であり，これは ∞-整数ではない．さらに，これと ∞-整数である $i_{\infty 235}$ との積は

$$-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(i_0-i_1+i_2+i_3-i_4+i_5+i_6)$$

であり，これの最小多項式 $x^2+\frac{3}{2}x+1$ は明らかに非整数的である．

Dickson はその妥当な訂正をみつけだしたが，それは Bruck によって再発見され補完された．∞-集合と ∞-整数との定義において ∞ と n とを入れ替えることで，$n=0,\dots,6$ に対して **n-集合**と **n-整数**とを定義する．

∞124	0356	**0124**	**∞356**	∞124	0356	∞124	0356
∞235	1460	**0235**	**146∞**	**1235**	**∞460**	∞235	1460
∞346	2501	**0346**	**25∞1**	**1346**	**250∞**	**2346**	**∞501**
∞450	3612	∞450	3612	**1450**	**36∞2**	**2450**	**361∞**
∞561	4023	**0561**	**4∞23**	∞561	4023	**2561**	**40∞3**
∞602	5134	∞602	5134	**1602**	**5∞34**	∞602	5134
∞013	6245	∞013	6245	∞013	6245	**2013**	**6∞45**
∅	Ω	∅	Ω	∅	Ω	∅	Ω
∞-集合		0-集合		1-集合		2-集合	

3124	**0∞56**	∞124	0356	**5124**	**03∞6**	**6124**	**035∞**
∞235	1460	**4235**	**1∞60**	∞235	1460	**6235**	**14∞0**
∞346	2501	∞346	2501	**5346**	**2∞01**	∞346	2501
3450	**∞612**	∞450	3612	∞450	3612	**6450**	**3∞12**
3561	**402∞**	**4561**	**∞023**	∞561	4023	∞561	4023
3602	**51∞4**	**4602**	**513∞**	**5602**	**∞134**	∞602	5134
∞013	6245	**4013**	**62∞5**	**5013**	**624∞**	**6013**	**∞245**
∅	Ω	∅	Ω	∅	Ω	∅	Ω
3-集合		4-集合		5-集合		6-集合	

図 9.2 すべての n-集合 (外部 n-集合は太字で表されている)

そして，次が得られる．

補題 2. n-整数は各々の $n = 0, \ldots, 6$ において，乗法的に閉じている．

証明 明らかに 7 つのシステムはどれも同型なので，0-整数について調べる．その半整添字集合は，次のとおりである：

$$\begin{array}{cccccccc} \emptyset & 0124 & 0235 & 0346 & \infty450 & 0561 & \infty602 & \infty013 \\ \Omega = \infty0123456 & \infty356 & \infty146 & \infty125 & 1236 & \infty234 & 1345 & 2456. \end{array}$$

0-整数はグレイヴス整数上で $i_{\infty356}$，i_{0235}，i_{0463}，i_{0156} によって張られることがわかるので，補題は次の乗法表から確かめられる．

	$i_{\infty356}$	i_{0235}	i_{0463}	i_{0156}
$i_{\infty356}$	$i_{\overline{\infty}356}$	$i_{\overline{\infty}234}$	$i_{\overline{\infty}461}$	$i_{\overline{\infty}152}$
i_{0235}	$i_{\overline{\infty}0\bar{4}5}$	-1	$i_{\overline{\infty}1\bar{2}5}$	$i_{\overline{\infty}\bar{4}1\bar{6}}$
i_{0463}	$i_{\overline{\infty}0\bar{1}3}$	$i_{\overline{\infty}\bar{1}2\bar{5}}$	-1	$i_{\overline{\infty}2\bar{4}3}$
i_{0156}	$i_{\overline{\infty}0\bar{2}6}$	$i_{\overline{\infty}4\bar{1}6}$	$i_{\overline{\infty}\bar{2}4\bar{3}}$	-1

□

結果として求めるシステムは，定理 1 にある 16 個の整環のうちの 7 個の極大なものである (図 9.1 をみよ)．それらのうちの 2 個の交わりは，それは 3 個の交わりでもあるのだが，7 個の "2 重フルビッツ整数 (double Hurwitzian)" のシステムとなる．(これらの典型的ものの半整添字集合 $\emptyset$, Ω, $\infty124$, 0356 は，それが四元数のフルビッツ環からのディクソンの二重化で得られることを示している.) これら 7 個すべての極大なシステムの交わりを，それは 2 重フルビッツシステムの任意の 2 個の交わりでもあるが，**クライン八元整数 (Kleinian octaves)** とよぶ．なぜならば，それはグレイヴスの八元整数に $\frac{1}{2}(1+i_0+\cdots+i_6)$ (これは $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-7})$ という形をしている) を付加して得られる "クライン (Kleinian)" 整数であるからである (2 章をみよ)．

では，定理 1 の証明を完結しよう．0 個か 4 個か 8 個かの座標の集合はすべて図 9.2 の中に出ているので，可能な半整添字集合はある $n \neq \infty$ についての n-集合であるということがわかる．ある n-集合に対し，それが ∞-集合でもあるかないかに応じて，それを**内部** (**inner**) あるいは**外部** (**outer**) n-集合とよぶ．

はじめに，外部 n-集合について考える．

補題 3. 半整添字集合が外部 n-集合であるような任意の一つの八元数 α とグレイヴス整数全体とで，すべての n-整数が生成される．

証明 その半整添字集合は 8 個の外部 0-集合の一つであると仮定してもよい．グレイヴス整数を引くことで，α を次の形に簡約化できる．

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pm i_a \pm i_b \pm i_c \pm i_d)$$

ここで同じ理由により符号の選択は重要ではない．そのとき，図 9.3 は 3 個のグレイヴス単元をかけることが，どのように 8 個の外部 0-集合すべてを結びつけるかを表している．任意の内部 0-集合は二つの外部 0-集合の和[3]であるから，それらの八元数はすべての 0-整数を加法的に生成する．□

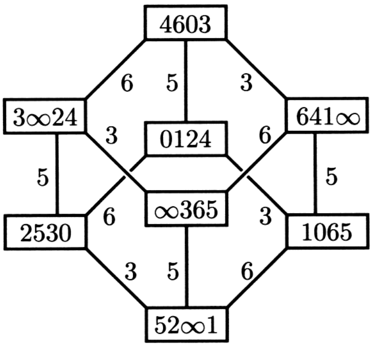


図 9.3 8 個の外部 0-集合と，i_3, i_5, i_6 をかけることによるそれらの間の関係 (符号は無視している).

では，内部 n-集合 (それは ∞-集合でもある) について考えてみよう．

補題 4. グレイヴス整数の下においては，次が成立する： (i) それらの半整添字集合が互いに補集合である 4 要素の ∞-集合であるような 2 個の八元数は，互いに生成しあう．(ii) それらの半整添字集合が互いに補集合でない異なる ∞-集合であるような 2 個の八元数は，ある n について n-整数を生成する (図 9.4 をみよ).

[3] ［訳注］ 正確には，排他的和．

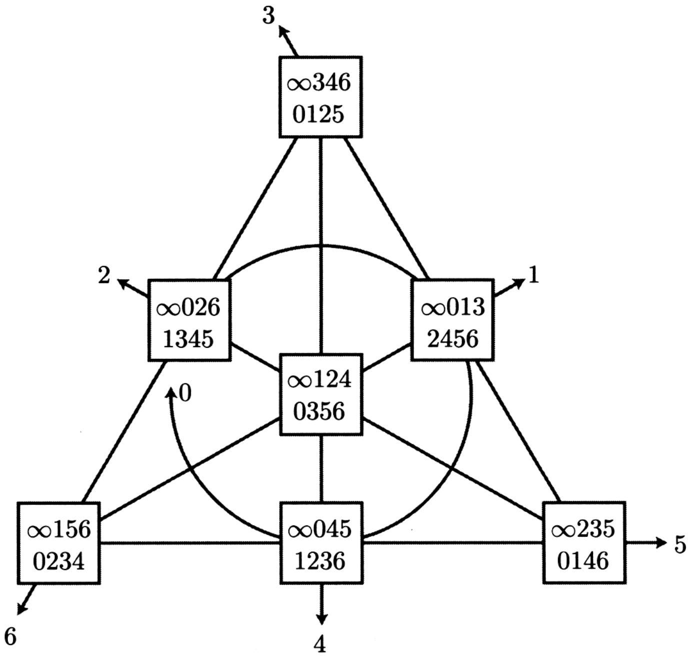


図 9.4　この "平面" 内で，2"点" が n のマークのついた "線" 上にあるとき，対応する半整添字集合の八元数は n-整数を生成する．

証明　(i) i_0 による左乗算は $\frac{1}{2}(i_\infty + i_1 + i_2 + i_4)$ を $\frac{1}{2}(i_0 + i_3 + i_6 + i_5)$ に変換する．残りも同様に示される．

(ii) 先ほど示した (i) より，両方の集合に ∞ が入っていると仮定してよく，よって一方は他方から添字を 7 を法として 1 か 2 か 4 かだけ増やすことで得られる．ここで，添字 2 倍の対称性 $\beta = (i_1 i_2 i_4)(i_3 i_6 i_5)$ [4)] を考慮すると，1 だけ増えていると仮定しても一般性を失わない．さらに，一般性を失うことなく，二つの半整添字集合を ∞602, ∞013 としてもよいが，$i_{\infty 602}$ と $i_{\infty 013}$ との積は半整添字集合 0235 であり，これは外部 0-集合である．□

4) ［訳注］ これは置換のサイクル表現であり，それは添字を 7 を法としてちょうど 2 倍する置換を表す．この置換は八元数の基本関係式を変えない．さらに，0-整数も保存する．すなわち，(後で定義する) 八元整数環の自己同型写像となる．

グレイヴス整数を含む整環は先ほど述べられた 16 個のうちのどれかである，ということの証明はいまや容易である．もしもそれがグレイヴス整数でもクライン整数でもないとき，それは 4 要素の半整添字集合のものを含み，それゆえ，$\emptyset$ そして Ω のものを含むと同様に，それらの補集合のものも含む．もしもそれらが半整添字集合のすべてであれば，それは 2 重フルビッツ環である．そうでなければ，ある外部 n-集合のものを含むか，あるいは 2 個の互いに補集合ではない異なる内部 n-集合のものを含むかのどちらかであるが，どちらにせよ n-整数全体を含むことになる．

任意のさらに大きな整環は，同様の考察により，2 個の異なる n の値について n-整数を含む．添字 2 倍の対称性 β より，その違いを 2 と仮定することができ，一般性を失うことなく，その整環が 0-整数 $i_{\infty 235}$ と 2-整数 i_{0235} とを含むと仮定できるが，すでにみたようにそれらの積は非整数的である．

9.3 Korkine, Zolotarev, Gosset の格子 E_8

ここで, 対象とする算術 (arithmetic) を 7 個の極大整環のどれか一つに固定することにし，**八元整数 (octavian integers)** (あるいは短く “the octavians”) を 0-整数と定める．幾何的には，八元整数の全体 O^8 はよく知られたそして非常に興味深い格子であり，**E_8 ルート格子**(あるいは，その幾何が Thorold Gosset [19] によって発見されたため，**ゴセット格子 (Gosset lattice)**) とよばれる[5]．

それの算術的な性質もまた盛んに研究されてきた．2 次形式の解析的な理論から，E_8 内のノルムが $2n > 0$ のベクトルの個数は，n の約数の立方の和に 240 をかけたものであるという事実を引用する．これに続く節では，この格子に対する単純で新しい幾何的な定義を与え，それを用いて八元整数には “より小さい剰余をもつ除算” の性質があることを証明する．

---

[5] それはまた，唯一の 8 次元 “偶ユニモジュラー (even unimodular)” 格子でもあり，その存在は H.J.S. Smith [39] によって 1867 年に証明された．Korkine と Zolotarev [28] とは，1877 年の球面充填の研究の際にそれを明示的に構成している．(それらは Rodrigues によってある程度予測されていた．) Blichfeldt [6] は 1935 年に，それは 8 次元においては実際に最稠密な球面の格子充填をもたらすことを証明した．

9.3.1 単体格子 A_n

n 次元**正単体**とは，互いの距離がすべて等しいような $n+1$ 個の点の凸包である．n 次元**単体格子**A_n とは，そのような n 次元単体の辺に沿ったベクトルで生成される格子である．そのベクトルを $(n+1)$ 空間内に

$$v_i = (0, 0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0, 0)$$

ととったとすると，生成元は，

$$v_i - v_j = (0, 0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, \overset{j}{-1}, \ldots, 0, 0)$$

となり，これによって A_n は和が 0 であるような $n+1$ 個の整数座標のベクトル $(x_0, \ldots, x_n)$ すべての集合とみなすことができる．

9.3.2 象限体格子 D_n

正象限体 (**regular orthoplex**) は**交差多面体** (**cross polytope**) とよばれているものを表す我々の用語であり，それは 2 次元の正方形と 3 次元の正八面体との類似物である (図 9.5 をみよ)．その頂点 $(\pm 1^1, 0^{n-1})$ は直交軸に沿った単位ベクトルの終点であり，また n 次元空間の各象限に一つの ($n-1$ 次元単体) セルをもっている (“orthople” という用語は “orthant-complex” を略してある)．

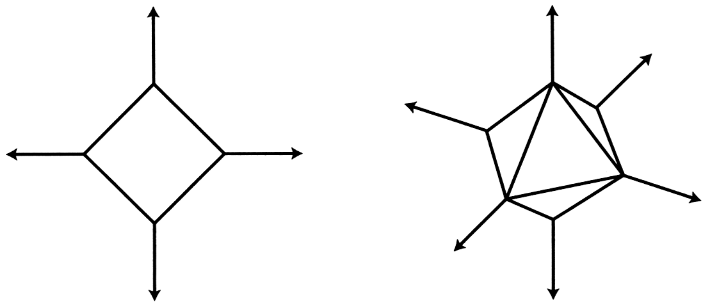


図 9.5　2 次元の象限体は正方形である．その 4 辺は平面の 4 象限に対応している．3 次元の象限体は正八面体である．その 8 面は空間の 8 象限に対応している．

n 次元**象限体格子** (**orthoplex lattice**) D_n は，一つの n 次元正象限体の辺に沿ったベクトルで生成された格子である．その象限体の頂点を

$$v_i = (0,0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0,0), \quad \overline{v_i} = (0,0,\dots,\overset{i}{-1},\dots,0,0) \quad (i=1,\dots,n)$$

ととると，D_n の生成元は $(\pm1^2, 0^{n-2})$ というすべてのベクトルであり，D_n は総和が偶数であるような整数の座標成分をもったすべてのベクトル $(x_1,\dots,x_n)$ のなす格子とみなされる．

9.3.3 E_8 の定義

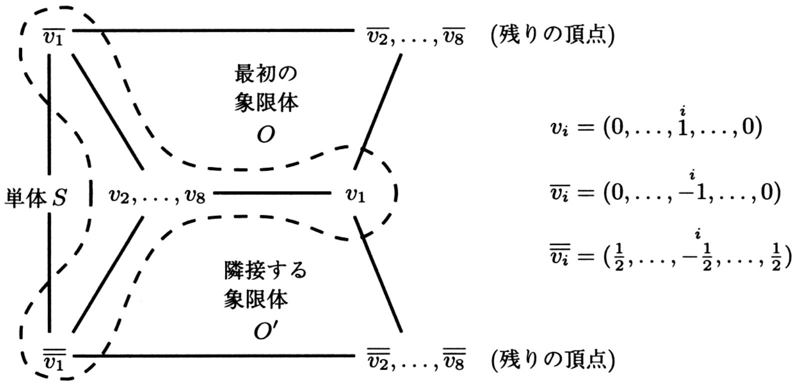
E_8 を (次元 8 の) 単体 S の辺ベクトルと，それに隣接する[6]象限体 O の辺ベクトルとで生成された格子と定める．図 9.6 はいくつかのことを表している：

- E_8 は A_8 および D_8 両方のコピーを含んでいる．実際，それは A_8 を指数 3 で含み D_8 を指数 2 で含むことを後でみる．
- O' を S の (O に接続する面に) 隣接する面上の象限体とするとき，$\langle S,O\rangle = \langle S,O'\rangle$ である．よってこの構成は S の全対称性をもっている．すなわち，E_8 は S の辺と S の 9 個の面のいずれかで隣接する象限体の辺とで生成される．
- O' を O の (S に接続する面に) 隣接する面上の象限体とするとき，$\langle S,O\rangle$ は O および O' の辺 (それらは隣接面を含む超平面での鏡映で移りあう) で生成される格子 $\langle O,O'\rangle$ に一致する．よって，この構成は O の半分の対称性しかもっていない．すなわち，E_8 は O の辺と O の 128 個のいずれかの面で隣接する**単体** (S) の辺とで生成され，また O の辺と O を他の 128 個の面における鏡映で移してできる**象限体** (O') の辺とで生成される[7]．

---

[6] ［訳注］ 一つの 7 次元面を共有するということ．

[7] ［訳注］ S は 9 個の (7 次元) 面しかもっていないが，O は $2^8 = 256$ 個の面をもっている．



O の頂点は $v_1, \dots, v_8, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_8}$ ，中心は (0^8)

O' の頂点は $v_1, \dots, v_8, \overline{\overline{v_1}}, \dots, \overline{\overline{v_8}}$ ，中心は $(\frac{1}{4}^8)$

S の頂点は $\overline{v_1}, \overline{\overline{v_1}}, v_2, \dots, v_8$ ，中心は $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}^7)$

図 9.6 $v_1 + \overline{v_1} = \cdots = v_8 + \overline{v_8}$, $v_1 + \overline{\overline{v_1}} = \cdots = v_8 + \overline{\overline{v_8}}$ という等式から，三つの格子 $\langle S, O\rangle$, $\langle S, O'\rangle$, $\langle O, O'\rangle$ はすべて，$\overline{v_1}, \overline{\overline{v_1}}, v_1, v_2, \dots, v_8$ の 10 頂点間の差で生成される格子に一致する．

この図は，先に述べたものと対称性により同値な単体と象限体とによって，E_8 を含んでいる 8 次元空間が覆われているということも，付随的に示している．その象限体の壁のうちの半分は同値な象限体につながり，残りの半分は単体につながるが，そうである一方，単体のほうからはすべての壁は象限体につながる．よって次が得られる．

補題 5. 8 次元空間内の任意の点 α に対して，格子 E_8 上の点 β で，$[\alpha - \beta] \leq 1$ であるものが存在する．

α はいずれかの単体か象限体かに含まれるので，その点はそれらの多面体の中心と比べて格子から離れてはいない．

八元整数が尺度を変えた E_8 格子のコピー[8]を含むことを示すには，それらの中で単体およびそれに隣接する象限体の頂点をみつければ十分である．これ

8) ［訳注］ E_8 を $\frac{1}{2}$ 倍した格子．

は図 9.7 の中で示されている．これらのベクトルのノルムは先ほどの E_8 のもの の半分であるので，次のようにいい直すことができる．

補題 6. 任意の実八元数 α に対して，$[\alpha - \beta] \leq \frac{1}{2}$ であるような八元整数 β が存在する．

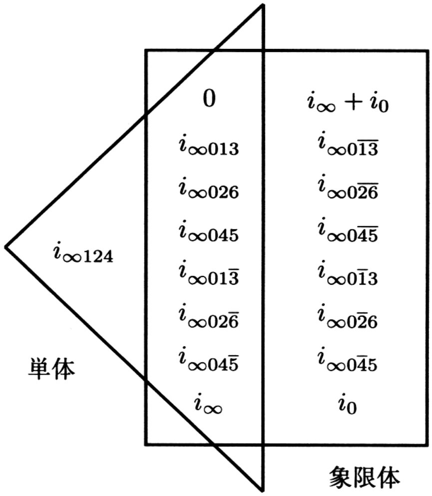


図 9.7　E_8 を生成する八元整数

9.4　剰余を伴う除算とイデアル

先ほどの補題を $\delta^{-1}\alpha$ (またはその代わりに $\alpha\delta^{-1}$) に適用することにより，次のことが直ちに得られる．

定理 2. α および δ を八元整数で $\delta \neq 0$ であるものとするとき，$[\rho] \leq \frac{1}{2}[\delta]$ であるようなある八元整数 β と ρ とで，$\alpha = \delta\beta + \rho$ (あるいは $\alpha = \beta\delta + \rho$) と書ける．

特に $[\rho] < [\delta]$ であるから，この定理はいつもどおりに次の事実を伴う．

定理 3. O^8 の任意の左あるいは右イデアルは単項である.

イデアルに興味がある通常の理由は，それらが因数分解定理の標準的な証明に現れるからである．非可換な環においては，左イデアルと右イデアルとは異なる概念である．しかしながら，O^8 は特異な環であり，次が成り立つ.

補題 7. O^8 内の任意のイデアルは両側イデアルである.

証明 特に，右イデアル $\mathcal{I}$ は単位右乗算について閉じている．第 8 章で，単元 i_0 および $i_{\infty 365}$ による左乗算が 7 個の単位八元数による右乗算の積であることを示した．第 10 章では，単位八元整数による任意の左乗算は 7 個の (単位八元整数による) 右乗算の積であることを示す．したがって，$\mathcal{I}$ は単位八元数による左乗算について閉じており，八元整数は単位八元整数の和であるので，任意の八元整数についての左乗算についても閉じている．□

さらに次のことがいえる.

定理 4. O^8 内の任意の両側イデアル Λ は，有理整数 n で生成される単項イデアル $n\mathrm{O}^8$ である.

これは一意分解性定理を証明ためにイデアルを用いる可能性を破綻させることになる．この結果は Mahler [32] によって部分的に証明され，van der Blij と Springer [43] によって概略がまとめられ，そして Lamont [30] によって完成された．我々の幾何的な結果はそれを容易にしてくれる.

証明 その理由は，Λ が単位八元数による両側乗算によって不変であるということであり，それは基本となる尺度のついた E_8 格子のすべての偶対称性[9]を生成する．そこで，次の定理を適用することができる．□

定理 5. E_8 の部分格子である Λ が E_8 のすべての偶自己同型によって固定されるとき，$\Lambda = nE_8$ である.

[9] ［訳注］ 偶数個の鏡映の積で表される対称性のこと.

証明 このことをみるために，E_8 の "象限体" 座標を用いる．Λ 内で最小の 0 ではないノルムをもつ元の一つを $v_1 = (a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h)$ とする．最初に，これらのうちのある 2 個の座標は 0 であると仮定できることを示そう．もしもそうでないとすると，偶置換を施して，g, h が最小の絶対値[10)]をもつ座標であるようにできるが，そのようにした後で，偶対称性で v_1 を $v_2 = (a\ b\ c\ d\ e\ f\ {-g}\ {-h})$ に写すものをとる．すると，$v_3 = v_1 - v_2 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2g\ 2h)$ のノルムは v_1 のノルム以下となる[11)]．

次に，0 でない座標が 2 個以上あるときを考える．先ほどの考察により，最後の 2 個の座標が 0 であるとすると，偶対称性 (3-サイクル) で $v_1' = (a\ b\ c\ d\ e\ f\ 0\ 0)$ を $v_2' = (a\ b\ c\ d\ e\ 0\ f\ 0)$ に写すものが存在する．ここで，f は最小の絶対値をもつ非ゼロ座標とする．そして再び，$v_3' = v_1' - v_2' = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ f\ {-f}\ 0)$ のノルムは高々 v_1' である[12)]．このことは，Λ のある最小非ゼロベクトルは E_8 のある最小非ゼロベクトルの f 倍であることを示しており，また偶対称性を施すことにより，E_8 の任意の最小ベクトルの f 倍が Λ に入っていることも示しており，よって $\Lambda = fE_8$ となる．

Λ の最小ベクトルが非ゼロ座標を一つだけもっている場合がまだ残されている．しかしそのとき，(E_8 内にある) それは $(2f\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ という形をしており，適当な偶対称性によって $(f\ f\ f\ f\ 0\ 0\ 0\ 0)$ の形にでき，先ほどの場合の議論に含めることができる．□

以上のことより，イデアル論は八元整数の因数分解についての考察には役に立たない．より実りの多いアプローチが次の節にある．

---

10) ［訳注］ 小さいほうから二つという意味．値が 0 である座標は高々一つしかないと仮定してあるから，g, h のどちらかは 0 ではない．

11) ［訳注］ $|a|, |b|, \ldots, |f| \geq |g|, |h|$ であるから，$[v_3] = 4g^2 + 4h^2 \leq a^2 + b^2 + \cdots + f^2 + g^2 + h^2 = [v_1]$．そこで，$v_3$ をはじめから v_1 としておけばよい．

12) ［訳注］ a, b, c, d, e の中に f 以上の絶対値をもつものがあるからである．

9.5 O^8 における因数分解

本節では，ノルムが mn の原始的な八元整数 ρ はちょうど 240 個のノルム m の左側約数と 240 個のノルム n の右側約数とをもち，それぞれの集合は O^8 の 240 個の単元と幾何的に相似であることを示す[13]．この結果は，O^8 内ということを除いて，第 5 章のフルビッツ整数に関する結果に類似しているが，$\mathbb{O}$ の結合性の欠如を考慮すると "単元転移" を法としても因数分解は一意的ではない．さらに一般的に，与えられた八元整数の左側約数の集合は，あるノルムのすべての八元整数の集合に幾何的に相似である，ということを示す．

議論が "小さな剰余を伴う除算の性質" の完全な八元整数の形式を用いないことは，注目に値する．しかしながら，E_8 の対応する性質を用いており，それで，より粗い八元整数のシステムに対しては破綻する．この破綻は，リプシッツ四元数に対するものよりも深刻である．

最初に，Rehm [37] による，興味深い "逆" ユークリッドのアルゴリズムを表す．**前進ステージ** (図 9.8) は組 ρ_1, m_1 からはじまる．ここで，ρ_1 はそのノルムが有理整数 m_1 で割り切れる八元整数である．技術的な理由により，剰余[14] は共役をとる．$[\rho_1] = m_0 m_1$ ととり，以下同様に m_i と八元整数 γ_i, ρ_i とを図 9.8 のように定める．

$$
\begin{array}{lll}
\rho_1 = \gamma_1 m_1 + \overline{\rho_2} & [\rho_1] = m_0 m_1 & \\
\rho_2 = \gamma_2 m_2 + \overline{\rho_3} & [\rho_2] = m_1 m_2 & m_1 > m_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\rho_{N-1} = \gamma_{N-1} m_{N-1} + \overline{\rho_N} & [\rho_{N-1}] = m_{N-2} m_{N-1} & m_{N-2} > m_{N-1} \\
\rho_N = \gamma_N m_N & [\rho_N] = m_{N-1} m_N & m_{N-1} > m_N > 0
\end{array}
$$

図 9.8 Rehm のアルゴリズムの前進ステージ

[13] これらの線に沿った最初の結果は，Rankin と Lamont とによる．しかし，幾何的な主張は新しいものである．

[14] [訳注] ρ_1 を m_1 で右から割ったときの剰余を $\overline{\rho_2}$ としている．また, 定理 2 より, $[\rho_2] \le \frac{1}{2}[\rho_1]$ である．

簡単に説明しよう．なぜ $[\rho_2]$ は m_1 で割り切れる (それゆえ $m_2 = [\rho_2]/m_1$ は整数となる) のか．それは，m_1 は次の式

$$[\overline{\rho_2}] = [\rho_1 - \gamma_1 m_1] = [\rho_1] + m_1^2[\gamma_1] - m_1(2[\rho_1, \gamma_1])$$

の右辺のすべての項を割り切るからである．また，$m_2 < m_1$ であるのはなぜか．それは，$m_1 m_2 = [\rho_2] \le \frac{m_1^2}{2}$ であるからである．

$m_2 > 0$ のときは，上の議論を ρ_2 と m_2 とに対して繰り返すことにより，ρ_3 と $m_3 < m_2$ とになり，これをまた繰り返す．m_i は m_0 から減少していくので，ある時点で $m_{N+1} = 0$ に至り，図 9.8 にそれらの関係が要約されているような有限個の $\mathbb{O}^8$ の元の集まりが得られる．

では，図 9.9 に示されている**逆進ステージ**に入ろう．それは，ρ_i のある約数たちの間の 1-対-1 対応 (実際は相似関係である)

$$\mu_N \leftrightarrow \mu_{N-1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \mu_1 \leftrightarrow \mu_0$$

を組み立てることになる．μ_N をノルムが m_N である任意の元とする．$\mathbb{O}$ は二項結合的[15)]であるから，

$$\rho_N = \gamma_N m_N = \gamma_N(\mu_N \overline{\mu_N}) = (\gamma_N \mu_N)\overline{\mu_N}$$

のように書ける．ここで，$\mu_{N-1} = \gamma_N \mu_N$ とおき，μ_{N-1} が ρ_N のノルム m_{N-1} の左側約数となるようにする．すると，$\overline{\mu_{N-1}}$ は $\overline{\rho_N}$ と m_{N-1} との両方の右側約数であり，

$$\begin{aligned}\rho_{N-1} = \gamma_{N-1} m_{N-1} + \overline{\rho_N} &= (\gamma_{N-1}\mu_{N-1})\overline{\mu_{N-1}} + \mu_N \overline{\mu_{N-1}} \\ &= (\gamma_{N-1}\mu_{N-1} + \mu_N)\overline{\mu_{N-1}}\end{aligned}$$

であるから，ρ_{N-1} の右側約数でもある．ここで $\mu_{N-2} = \gamma_{N-1}\mu_{N-1} + \mu_N$ とおくと，ρ_{N-1} のノルム m_{N-2} の左側約数が得られる．この手続きを $\rho = \rho_1$ のノルム $m = m_0$ の左側約数 μ_0 と対応するノルム $n = m_1$ の右側約数 $\overline{\mu_1}$ とに行き着くまで続けることができる．図 9.9 はこの因数分解がなされる過程を要約しているが，それは図 9.8 の左側の列を下から上までたどることとみなせる．

15) ［訳注］ 任意の 2 個の元で生成される部分代数は結合的であること．第 6 章を参照．

$$
\begin{array}{lll}
 & & [\mu_N] = m_N \\
\rho_N = \mu_{N-1}\overline{\mu_N} & \mu_{N-1} = \gamma_N \mu_N & [\mu_{N-1}] = m_{N-1} \\
\rho_{N-1} = \mu_{N-2}\overline{\mu_{N-1}} & \mu_{N-2} = \gamma_{N-1}\mu_{N-1} + \mu_N & [\mu_{N-2}] = m_{N-2} \\
\rho_{N-2} = \mu_{N-3}\overline{\mu_{N-2}} & \mu_{N-3} = \gamma_{N-2}\mu_{N-2} + \mu_{N-1} & [\mu_{N-3}] = m_{N-3} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\rho_2 = \mu_1\overline{\mu_2} & \mu_1 = \gamma_2\mu_2 + \mu_3 & [\mu_1] = m_1 \\
\rho_1 = \mu_0\overline{\mu_1} & \mu_0 = \gamma_1\mu_1 + \mu_2 & [\mu_0] = m_0
\end{array}
$$

図 9.9 Rehm のアルゴリズムの逆進ステージ

図 9.8 では，本質的な道筋において代数の乗法が用いられていないことを注意しておこう．さらに，図 9.9 において，三つの元を含む積は結合的部分代数内でのみ現れている．

9.5.1 約数の集合の構造

いまや，$\rho = \rho_1$ のノルム $m = m_0$ および $n = m_1$ の左側および右側の可能なすべての約数の集合を記述することができる．これらの集合のサイズは，図 9.8 の最後の列にあるノルムが整数 m_N である八元整数 μ_N の個数であることをみよう．これらの集合の幾何的な配置をみるために次を用いる．

補題 8. 八元整数 γ が $\gamma = \alpha\beta = \alpha'\beta'$ (ただし，$[\alpha] = [\alpha'] \neq 0$ かつ $[\beta] = [\beta'] \neq 0$) と 2 通りに因数分解されたとする．このとき，α と α' との間の角度 θ_a は β と β' との間の角度 θ_b に等しい．

証明 γ と $\alpha\beta'$ との内積をとることにより，

$$[\alpha][\beta,\beta'] = [\alpha\beta,\alpha\beta'] = [\gamma,\alpha\beta'] = [\alpha'\beta',\alpha\beta'] = [\alpha',\alpha][\beta']$$

が得られるが，これより

$$\cos\theta_a = \frac{[\alpha,\alpha']}{[\alpha]} = \frac{[\beta,\beta']}{[\beta']} = \cos\theta_b$$

となる．□

ここで，$\{\mu_N\}, \{\mu_{N-1}\}, \ldots, \{\mu_0\}$ を逆進ステージ (図 9.9) に現れる可能性のあるすべての μ_k の集合を表すものとする．$\{\mu_N\}$ は，実際にはノルム m_N のすべての八元整数の集合であることを示した．それは，その共役集合 $\{\overline{\mu_N}\}$ と明らかに相似であるが，しかし，これは補題 8 において $\gamma = m_N$ とおくことでも導き出せる．この関係を

$$\{\mu_N\} \overset{m_N}{\sim} \{\overline{\mu_N}\}$$

と表すことにする．同様の方法で，相似性

$$\{\overline{\mu_N}\} \overset{\rho_N}{\sim} \{\mu_{N-1}\} \overset{m_{N-1}}{\sim} \{\overline{\mu_{N-1}}\} \overset{\rho_{N-1}}{\sim} \cdots \overset{m_1}{\sim} \{\overline{\mu_1}\} \overset{\rho_1}{\sim} \{\mu_0\}$$

を，適当な i において交互に $\gamma = \rho_i$ および m_i をおくことで，みつけることができる．そして，$\{\mu_0\}$ および $\{\overline{\mu_1}\}$ は正確に ρ_1 のノルム n の左および右側約数の集合となる．

以上のことは，次を導く．

定理 6. $\rho = \rho_1$ をノルム mn の八元整数とする．ここで，m, n は有理正整数である．d を ρ, m, n 共通の有理整数約数で最大のもの (最大有理公約数) とする．このとき，ρ のノルム m の左側約数 (μ_0) の集合と，ρ のノルム n の右側約数 $(\overline{\mu_1})$ の集合とは，ともに，ノルム d $(= m_N)$ のすべての八元整数 (μ_N) の集合に幾何的に相似である．

証明 ノルムを確認することを除いて，すべてのことはすでに行った．そこで，m_N を決定することのみを行う．$\gcd(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ を O^8 内にある $\eta_1, \ldots, \eta_k$ の最大有理公約数を表すとする．このとき，次が成り立つ．

補題 9. $d_i = \gcd(\rho_i, m_{i-1}, m_i)$ $(1 \le i \le N)$ とおくとき，$d_i = d_{i+1}$ $(1 \le i \le N-1)$ となる．

証明 最初に，d_i が ρ_i および m_i を割り切るので，d_i は $\overline{\rho_{i+1}} = \rho_i - \gamma_i m_i$ を割り切り，よって ρ_{i+1} も割り切る．これは定義により m_i を割り切る．そして，d_i は次式の最後の一行の各々の項を割り切るので，m_{i+1} を割り切る．

$$m_{i+1} = \frac{[\overline{\rho_{i+1}}]}{m_i} = \left(\frac{1}{m_i}\right)([\rho_i] + m_i^2[\gamma_i] - m_i(2[\gamma_i, \rho_i]))$$
$$= m_{i-1} + m_i[\gamma_i] - 2[\gamma_i, \rho_i].$$

したがって，d_i は d_{i+1} を割り切る．同様の議論により，d_{i+1} も d_i を割り切り，したがって $d_i = d_{i+1}$ を得る．□

定理の証明の続き 先ほどの定理は次のように導かれる．

$$d_N = \gcd(\rho_N, m_{N-1}, m_N) = m_N$$

であるから，

$$m_N = d_1 = \gcd(\rho_1, m_0, m_1) = \gcd(\rho, m, n) = d$$

となる．□

この定理は，任意のノルムの 2 個以上の因子への "非原始的な状態" での分解の個数を数え上げることに用いることができる．次節では素元への因数分解のみを論ずる．

9.6 素元分解の個数

第 5 章では，そのノルムの素因数分解をモデルとした四元数の素元分解を数え上げた．例えば，ノルム 60 の原始的なフルビッツ整数の素元分解を単元転移を無視して数え上げると，次の 12 個の 60 の素因数分解をモデルとした 12 通りがある：

$$\begin{array}{cccccc} 2.2.3.5 & 2.2.5.3 & 2.3.2.5 & 2.5.2.3 & 2.3.5.2 & 2.5.3.2 \\ 3.2.2.5 & 5.2.2.3 & 3.2.5.2 & 5.2.3.2 & 3.5.2.2 & 5.3.2.2\ . \end{array}$$

八元数においては，結合法則が成り立たないことが二つの方向へ変化する状況を引き起こす．一方では，60 の通常の素数への $5 \times 12 = 60$ 通りの素因数分解

$$60 = ((2.2)3)5 = (2(2.3))5 = (2.2)(3.5) = 2((2.3)5) = 2(2(3.5))$$
$$= ((2.2)5)3 = (2(2.5))3 = \cdots$$

がある．しかしまた，Q の因数分解でそのノルムの与えられた素因数分解をモデルとしたものは，$\alpha u.u^{-1}\beta$ が $\alpha\beta$ に等しいとは限らないため，単元転移で関連づけられなくなってしまう．

しかしながら，ちょうど二つの隣接する因子に影響する変化を，それは単元転移の“模倣”であるので，**メタ転移 (metamigration)** とよぶことにする．$\beta\gamma$ から単元転移で得られる因数分解 $\beta u.u^{-1}\gamma$ の個数は単元の個数に等しく，左側因子 βu の集合は，単元 u の集合に幾何的に相似であるということに注意しておこう．先ほど示した二項因数分解定理から，容易に次のことが導かれる．

定理 7. 原始的八元整数の，そのノルムの与えられた素因数分解をモデルとした因数分解，例えば $Q=((P_1P_2)(P_3(P_4 ... P_k)))$ としよう，の個数は 240^{k-1} である．さらに，P_i および P_j を除いて他のすべてを固定するとき，P_i および P_j の値の集合は 240 個の単元の集合に幾何的に相似である．

では，Q が原始的とは限らないときはどうなるのかをみてみよう．

定理 8. ノルムが $p_1^{n_1}\dots p_k^{n_k}$ の八元整数でちょうど $p_1^{s_1}\dots p_k^{s_k}$ で割れるものは，正確に

$$240^{n-1}\prod C_{n_i,s_i}(p_i^3)$$

個の素元分解を任意の与えられたモデル上にもつ．ここで，“打ち切りカタラン多項式” $C_{n,s}(x)$ は第 5 章で定義されており，$n=n_1+\cdots+n_k$ である．

証明 四元数の場合と同様に，ただ一つの有理素数 p のみを含んでいる場合を考察すれば十分である．次の形の因数分解

$$P_1(P_2(\dots(P_{n-1}P_n)\dots))$$

に対して，議論は単元転移を法として行うことができないので，したがって 240 個の因数をそれらが現れるとおりに数える必要があり，また，ノルム p の八元数は $240(p^3+1)$ 個あるから p は p^3 で置き換える必要がある，ということを除いて，それは第 5 章での議論と正確に同じである．(素数 2 はもう特別ではない．)

これと同様の議論が，1 個の素因子を繰り返し結合させることでつくり上げられる次のような因数分解

$$P_1((P_2P_3)P_4)$$

にも適用される．このような形をしていない因数分解，例えば

$$(P_1P_2)(P_3P_4)$$

のような場合，"メタ結合性補題" を使うことができ，それによると，$(AB)C$ および $A'(B'C')$ の形の因数分解で，(A, A'), (B, B'), (C, C') のどの組もそれぞれ同じノルムをもち，同じ有理整数で割り切れるようなものは，どちらも同じ個数だけある．詳細は伏せておく．□

モデルを変化させることにより，素元分解の総個数は次のもの：

- 与えられたモデル上の素因数分解を "メタ転移 (metamigration)" を法として数え上げた個数 $C_{n_1,s_1}(p_1^3)$, ..., $C_{n_k,s_k}(p_k^3)$；
- そのモデルの中での素数の可能な並べ方の個数である，多項係数 $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$;
- 括弧の可能なアレンジの個数であるカタラン数 C_{n-1}

の積に 240^{n-1} をかけたものであることがわかる．(四元数におけるこれに対応する結果は，240 を 24 で置き換えて，p_i^3 を p_i で置き換えて，そしてそれらの結合性のおかげで C_{n-1} を省略したものである．)

後で述べるメタ転移 (metamigration)，メタ交換 (metacommutation)，メタ結合 (metassociation) の問題を解くまでは，八元整数の素元分解が "一意的" であるというわけにはいかない．しかしながら，Rankin と Lamont とは，奇数ノルムの原始的八元整数は，因子が指定された単元と 2 を法として合同であると要求することによって，一意的にできることを指摘した．

9.7 八元整数分解の“メタ問題”

フルビッツ整数の一意分解性の問題を**メタ可換の問題**，つまり「素因数分解 pq および qp をモデルとした因数分解 PQ および $Q'P'$ の間の関係は何か」に帰着させたことを思い起こそう．八元整数の因数分解においては，さらに**メタ結合の問題**，つまり「素因数分解 $(pq)r$ および $p(qr)$ をモデルとした因数分解 $(PQ)R$ および $P'(Q'R')$ の間の関係は何か」がある．さらには，**メタ転移の問題**，つまり「同じ素因数分解 pq をモデルとする因数分解 PQ および $P'Q'$ の間の関係は何か」もある．なぜなら，それらはもう単元転移では関係づけられないからである．

そこには，また，グレイヴス整数の場合の因数分解をどのように理解するか，という問題もある．定理 6 に対応する主張は，C. Feaux [16] による次のものである．

定理 9. p, q を相異なる素数とするとき，ノルム pq のグレイヴス整数は pq をモデルとするちょうど 16 通りの因数分解

$$P_1Q_1 = (-P_1)(-Q_1) = \cdots = P_8Q_8 = (-P_8)(-Q_8)$$

をもつ．さらに，左側因子は，右側因子と同様にグレイヴス単元に相似である (すなわち $P_1, \ldots, P_8$ は互いに直交する)．

グレイヴス整数のメタ転移問題は，それら 16 個の因子はどのようにしてそのうちの一つから復元できるか，ということを問いている．その整数があるリプシッツ部分環に属している場合には，その問題を部分的に解くことができる．

定理 10. $L = PQ$ および $L = Q'P'$ をリプシッツ整数 $L = a + bi_1 + ci_2 + di_4$ の pq および qp をモデルとした因数分解とする．そのとき，pq をモデルとした L のグレイヴス整数因数分解は

$$PU.\overline{U}Q \quad \text{および} \quad P'V.\overline{V}Q'$$

である．ここで，U は $\pm 1, \pm i_1, \pm i_2, \pm i_4$ 上を動き，V は $\pm i_0, \pm i_3, \pm i_5, \pm i_6$ 上を動く．

証明 これは，結合の二重化法則

$$(a+i_0b)(c+i_0d)=(ac-d\bar{b})+i_0(cb+\overline{a}d)$$

から直ちに導かれる．□

したがって，この場合には，グレイヴス整数のメタ転移問題はリプシッツ整数のメタ結合問題に帰着する．

10

O の自己同型と部分環

本章では，単位八元整数について少し詳しく考察し，それを用いて $\mathbb{O} = \mathbb{O}^8$ の自己同型群をみつけ，またその部分環のいくつかについても考察する．

10.1　240 個の単位八元整数

次の表の最初の列は，i_a, i_b, i_c が i, j, k のように振舞う八元数の三つ組を表す abc を与えている．それらに ∞ もしくは 0 を付け加えることにより 7 個の “四つ組 (quad)” が得られ，それらの補集合 “補四つ組 (co-quad)” もそうであるように，それらは八元整数の半整添字集合 (halving-set) となる[1]．

三つ組

124	0	∞365
235	0	∞461
346	0	∞512
450	∞	6123
561	0	∞234
602	∞	1345
013	∞	2456

四つ組　　補四つ組

1) ［訳注］ これらの四つ組と補四つ組とをあわせると，第 9 章で定義した 0-集合の族になる．

八元整数単元 (**octavian unit**) とは，八元整数で，その逆元がまた八元整数であるものをいう．そのようなものは何個あるだろうか．

定理 1. ちょうど 240 個の単位八元整数がある．

証明 単元は次の二つのいずれかの形をしている：

$$\pm 1,\ \pm i_0,\ \ldots,\ \pm i_6 \quad \text{または} \quad \frac{1}{2}(\pm i_a \pm i_b \pm i_c \pm i_d).$$

ここで，$abcd$ は 14 個ある 4 要素 0-集合の中の一つである．右側のものには 16 通りの符号の選択肢があるので，総数は $16 + 14 \cdot 16 = 240$ となる．□

それらを乗法的な位数で分類するのは容易であり，次のようになる．

- 位数が 1 または 2 であるものが 2 個．すなわち $+1$ および -1.
- 位数が 3 または 6 であるものが 56 個．すなわち $\pm\frac{1}{2}(-1 \pm i_a \pm i_b \pm i_c)$. ここで，$abc$ は 356 146 125 450 234 602 013 のいずれか．
- 位数 4 のものが 126 個．すなわち $\pm i_n$ および $\frac{1}{2}(\pm i_d \pm i_e \pm i_f \pm i_g)$. ここで $defg$ は 0124 0235 0346 1236 0561 1345 2456 のいずれか．

乗法的な位数が 3 および 4 である元を，それぞれ "ω 達" ("ω"s) および "i 達" ("i"s) とよび，また，それらを表すのに次の記号を用いる：

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2}(-1 + i_a + i_b + i_c), \quad i_{defg} = \frac{1}{2}(i_d + i_e + i_f + i_g).$$

また，添字にバーをつけるのは，その成分にマイナスを付けることを意味する．例えば，

$$\omega_{ab\bar{c}} = \frac{1}{2}(-1 + i_a + i_b - i_c), \quad i_{d\bar{e}\bar{f}g} = \frac{1}{2}(i_d - i_e - i_f + i_g)$$

である．

これらが生成するものがどういう集まりであるか，ということを問うときには，それらを逆元で組みにするのが自然である．この視点をとると，我々が研究しようとしているものは，63 組みの**目**(**eyes**) ("i"s) と 28 組みの**腕**(**arms**) ("*oms*" = "ω"s) とをもった獣[2]である．

---

2) ［訳注］ これでは，もはや獣 (beast) ではなく，怪物 (monster) であろう．

10.2 2 種類の直交性

続くいくつかの節では，八元整数の環 O の自己同型群 Aut(O) を考察する．ある意味では，これは 6 章で行ったこと (実八元代数の自己同型群は 14 次元のリー群 $G_2(\mathbb{R})$，略して G_2，であることをみつけたこと) の離散的な類似物である．ここでは，八元整数環は 2 個の元からなる体 $\mathbb{F}_2$ 上の類似する群 $G_2(\mathbb{F}_2)$ であることを示す．普通，この群は群論の研究者によって $G_2(2)$ と略記されている．

ここで述べる離散的理論は，普通は連続的理論より従うが，しかし少しの違いがある．例えば，連続の場合，1 に直交する任意の単元は他の任意のそれ (1 に直交する単元) のように振舞い，直交する任意のペアは他の任意のそのようなペアのように振舞う．これらの命題のうち，前者は離散的な場合でも正しいままであるが，後者は正しくない．1 に直交する 126 個の単元 (“i 達”) はすべて群の下で同値であるが，しかし，直交する “i 達” のペア i, j には 2 種類ある．そのような直交するペア i, j で，$\frac{1+i+j+ij}{2}$ が八元整数であるとき**偶直交** (**evenly orthogonal**) とよび，そうでないとき**奇直交** (**oddly orthogonal**) とよぶ．同じ状況で，i, j, ij を**偶**あるいは**奇**四元数三つ組とよぶ．

$\frac{1}{2}(\pm i_a \pm i_b \pm i_c \pm i_d)$ の形の八元整数で，奇数個の符号がマイナスであるものを i'_{abcd} の記号で表し，またそれが偶数個であるものを i''_{abcd} の記号で表し，その両方の種類のものを i^*_{abcd} の記号で表すとする．

補題 1. i_0 はちょうど 60 個の “i 達” に直交しており，それらのうち 12 個は偶直交する $\pm i_1, \pm i_2, \ldots, \pm i_6$ 達であり，残りの 48 個は奇直交する $i^*_{1236}, i^*_{2465}, i^*_{4153}$ 達である．

証明 $\pm i_n$ 以外の各々の i は i^*_{abcd} という形をしており, 1236, 2465, 4153 が ∞ も 0 も含まない 0-集合のすべてであるので, 実際, そこにはちょうど 60 通りの可能性がある．直交性のタイプについては, 添字 2 倍の対称性 $(i_1 i_2 i_4)(i_3 i_6 i_5)$ を[3] 用いると，$j = i_1$ および i_3 が $i = i_0$ に偶直交すること (それは,

[3] ［訳注］ 添字を (7 を法として) 2 倍するという写像．これは八元数の積に関する関係式を保存し，また，0-集合も保存する．すなわち，八元整数環の自己同型写像となる．

$$\frac{1+i+j+ij}{2} = \frac{1+i_0 \pm i_1 \pm i_3}{2}$$

が $\mathbb{O}^8$ に属しているから) と，$j = i^*_{1236}$ が奇直交すること (それは,

$$\frac{1+i+(j+ij)}{2} = \frac{1+i_0+(\pm i_{1 \text{ or } 3} \pm i_{2 \text{ or } 6})}{2}$$

が $\mathbb{O}^8$ に属さないから) とを確認すれば十分である．□

これ以降は，符号を法として議論をすることにする．したがって，i_0 に偶直交する "i 達" は，ちょうど 6 個あることになる．

10.3 O の自己同型群

各々の "i" を，それに偶直交する 6 個の "i" 達に結ぶことで，超六角形 (hyperhexagon)[4] とよばれるグラフができる．図 10.1 はこのグラフの i_0 に近い部分を表しており，図 10.2 はその残りを表している[5]．

このグラフを用いて次を示す．

定理 2. Aut(O) は "i 達" の上で推移的である．

証明 位数 3 の任意の ω に対して，写像 $x \to \overline{\omega} x \omega$ は，第 8 章の定理 14 より，八元数乗法の自己同型であり，もしも ω が O 内にあればそれは O を O に写す．例えば，$\omega = \frac{1}{2}(-1+i_0+i_1+i_3)$ による共役は，i_0 を i_1 に，i_1 を i_3 に，i_3 を i_0 に写す O の自己同型である．

まったく同様の方法で，超六角形内にある任意の三角形の頂点を置換する自己同型が得られ，このグラフは連結であることから，それらは推移性をもたらす．□

O の一般の自己同型写像による i_0, i_1, i_2 の像 $i_0^\dagger, i_1^\dagger, i_2^\dagger$ について，何がいえるだろうか．i_0 は i_1 と i_2 とに偶直交し，i_1 と i_2 とは互いに奇直交しているので，$i_0^\dagger, i_1^\dagger, i_2^\dagger$ も同じ性質をもたなければならない．一方，次が成立する．

---

4) 普通は，一般化された六角形とよぶ (本節の最後をみよ)．

5) [訳注] これらの図には，もう少しの解説が必要であろう．図 10.2 では一つの線で一つの三角形を表している．その三角形の 3 頂点は線分の両端と中ほどに数字列で記されている．

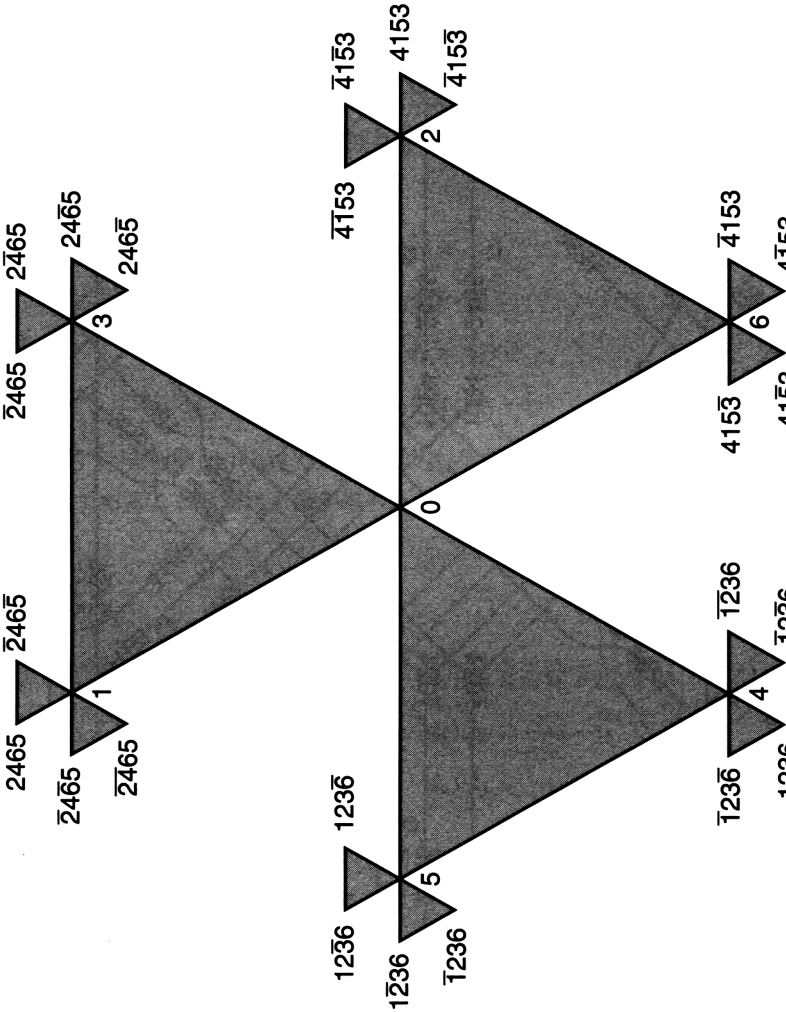


図 10.1 超六角形の i_0 に近い側 ("near side") にある 15 個の三角形. 外側の各々の頂点は, 図 10.2 では線として表されている, さらに外側の 2 個の三角形に現れる.

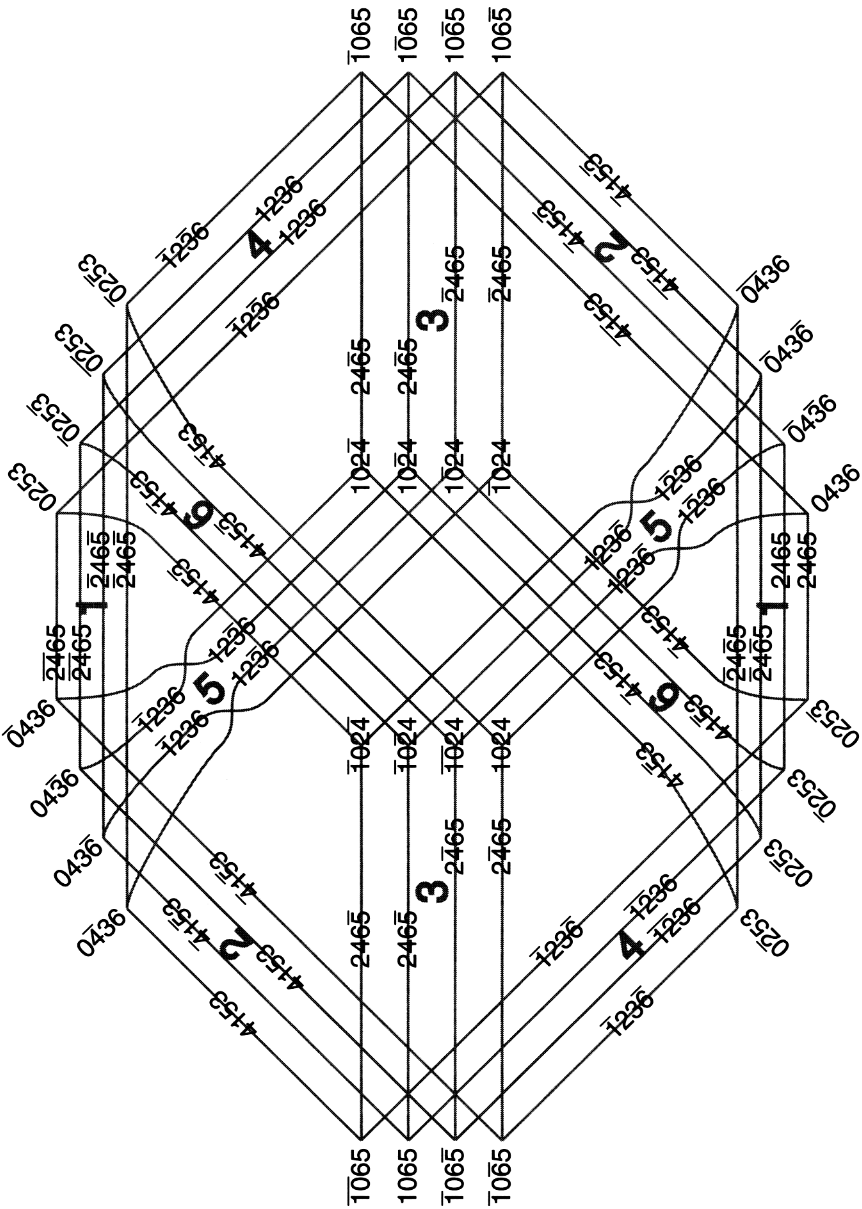


図 10.2　超六角形グラフの遠い側 (“far side”) にある 48 個の三角形.

定理 3. $i_0^\dagger, i_1^\dagger, i_2^\dagger$ が三つの互いに直交する "i 達" であり，しかも，その直交性が偶であるのは $i_0^\dagger$ を含む組だけであるとき，O の自己同型写像で $i_0 \to i_0^\dagger$, $i_1 \to i_1^\dagger$, $i_2 \to i_2^\dagger$ と写すものが一意的に存在する．

証明 i_0, i_1, i_2 の像が決まっていれば $i_4 = i_1 i_2$, $i_3 = i_0 i_1$, $i_6 = i_0 i_2$, $i_5 = i_0 i_4$ の像も決まるので，一意性は直ちにわかる．例えば，自己同型写像を $i_0^\dagger = i_0$, $i_1^\dagger = i_2$, $i_2^\dagger = i_1$ と定めると，

$$
\begin{aligned}
i_4^\dagger &= i_1^\dagger i_2^\dagger = i_2 i_1 = -i_4 \\
i_3^\dagger &= i_0^\dagger i_1^\dagger = i_0 i_2 = i_6 \\
i_6^\dagger &= i_0^\dagger i_2^\dagger = i_0 i_1 = i_3 \\
i_5^\dagger &= i_0^\dagger i_4^\dagger = i_0(-i_4) = -i_5
\end{aligned}
$$

となり，これは置換 $(i_0)(i_1 i_2)(i_3 i_6)(i_4 \, {-i_4})(i_5 \, {-i_5})$ を引き起こし，それが自己同型写像であることは簡単に確かめられる．同様の方法で，次のような際だった対称性

$$
\begin{aligned}
&(i_0)(i_1\ i_2\ i_4)(i_3\ i_6\ i_5) \\
&(i_0)(i_2)(i_6)(i_1\ i_3\ {-i_1}\ {-i_3})(i_5\ i_4\ {-i_5}\ {-i_4}) \\
&(i_0)(i_1)(i_3)(i_2\ i_4\ {-i_2}\ {-i_4})(i_6\ i_5\ {-i_6}\ {-i_5}) \\
&(i_0)(i_1)(i_3)(i_2\ i_5\ {-i_2}\ {-i_5})(i_4\ i_6\ {-i_4}\ {-i_6})
\end{aligned}
$$

をみつけることができる．定理の自己同型写像が存在することを，一般に次のようにして示そう．最初に，推移性により $i_0^\dagger = i_0$ の場合に帰着できる．そのとき，i_0 と偶直交するのは "i 達" のみであることから，$i_1^\dagger$ と $i_2^\dagger$ とは $\pm i_n$ のどれかでなければならない．上記の対称性により，$i_1^\dagger$ を i_1 (i_0 を固定しながら) に，$i_2^\dagger$ が i_2 (i_0 と i_1 とを固定しながら) である場合に帰着することができるので，定理の結果を得ることになる．□

この直接の系として次が得られる．

系． Aut(O) の位数は 12096 である．

証明 $i_0^\dagger$ は 126 個の "i 達" の任意の一つになりうる．もしも $i_0^\dagger = i_0$ であるならば，$i_1^\dagger$ は i_0 に偶直交する 12 個の "i 達" $\pm i_1, \ldots, \pm i_6$ の任意の一つになりうる．さらにもしも $i_1^\dagger = i_1$ でもあるならば，$i_2^\dagger$ は i_0 に偶直交するが i_1 には奇直交する 8 個の "i 達" $\pm i_2, \pm i_4, \pm i_6, \pm i_5$ の任意の一つになりうる．よって位数は

$$126 \times 12 \times 8 = 12096$$

となる．□

定理 4. Aut(O) は，(1) 偶四元三つ組の集合上でも，(2) 奇四元三つ組の集合上でも，(3) "ω 達" の集合上でも，推移的である．

証明 (1) もしも $i \to i_0$ かつ $j \to i_1$ であるならば $k \to i_3$ である．(2) もしも $i \to i_1$ かつ $j \to i_2$ であるならば $k \to i_4$ である．(3) 任意の $\omega = \frac{1}{2}(-1 \pm i_a \pm i_b \pm i_c)$ に対して，偶四元三つ組 i, j, k で $\omega = \frac{1}{2}(-1+i+j+k)$ であるものをみつければ十分であるが，それは $i = \pm i_a$, $j = i^\omega$, $k = j^\omega$ とすればよい[6)]．□

図 10.1 と図 10.2 とに描かれているグラフは，通常，**一般化された六角形 (generalized hexagon)** とよばれるが，我々は "超六角形 (hyperhexagon)" という名前を用いることにする．通常の多角形は頂点と辺との連結な集合で，どちらの種類のどの物も，他の種類の二つと接続しているようなものである．それが ***n* 角形**とよばれるのは，頂点とそれに接続する辺とがそれぞれ n 個交互に並んで円周を形成しているときである．一般化された n 角形の概念は，上記にある数 2 をもっと大きな数，我々の場合は 3，で置き換えて得られる．我々の超六角形の頂点集合は "i 達" を符号を無視して列挙したものである．その "超辺 (hyperedge)" は，そのような (符号を無視した) "i 達" の偶四元三つ組 i, j, k である．

---

6) いつでも i, j, k を $\pm i_a, \pm i_b, \pm i_c$ ととることはできない．なぜならば，それらは四元三つ組ではないかもしれないからである．$\omega = \omega_{365}$ に対しては，本文の議論は $i = i_3$，$j = i_{\bar{2}465}$，$k = i_{2\bar{4}65}$ を導く．

10.4 八元整数単元環

八元整数単元環 (octavian unit ring) は，単元で生成される O^8 の部分環である．次の定理は補遺で証明する．

定理 5. 奇数位数の元で生成される整数環には，自己同型を法として 4 種類のタイプ (G^1, E^2, H^4, O^8) があり，それらからディクソンの二重化によってすべての八元整数単元環が得られる (図 10.3 をみよ).

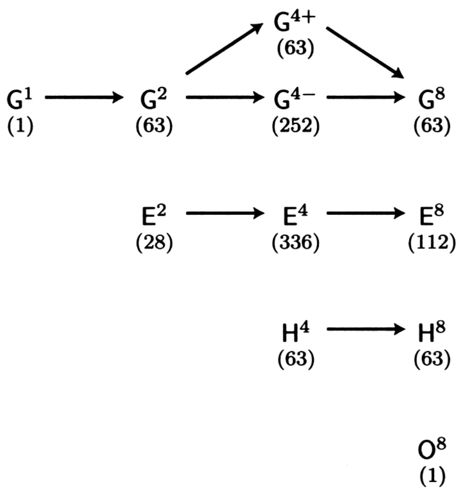


図 10.3 単元環の一覧．ここで，G^1 は通常の整数 $\mathbb{Z}$; E^2 は O^8 内の位数 3 の元 ω で生成されるアイゼンシュタイン環 $\mathbb{Z}[\omega]$; H^4 はフルビッツ環 $\mathbb{Z}[i, j, k, \frac{1}{2}(-1+i+j+k)]$; O^8 は全八元整数環である．矢印 R^n $\to$ R^{2n} は，R^{2n} が R に直交するある i についてのディクソンの二重化 $\langle$R$^n, i\rangle$ であることを意味している．括弧内の数は，それぞれのタイプの環の個数である．

一つの重要な例外はあるが，二つの単元環が抽象的に同型であるならばそれらは O^8 の対称性によって移りあう，ということがわかる．例外とは，抽象的タイプ G^4 $= \langle i, j, k\rangle$ の場合で，それには二つの軌跡[7]，つまり i, j, k が偶直交する G^{4+} と i, j, k が奇直交する G^{4-} とがある．

[7] [訳注] O^8 の対称性による軌跡という意味．

ここで，極大部分群に対応するものに特別な注意を払って，推移性の非自明な場合について短い議論をする．G^2 と G^8 のタイプの環上の推移性は，それらが互いに[8]，そして超六角形の頂点と 1-対-1 の対応にあることから従う．G^{4+}, H^4, H^8 のタイプの環上の推移性は，これらもまた互いに[9]，そして超六角形の"超辺 (hyperedges)" と 1-対-1 の対応にあることから従う．

環 G^{4-} 上での推移性は，奇四元三つ組上での推移性から従う．しかしながら，$\langle i_1, i_2, i_4\rangle$ を固定する自己同型写像は $\pm i_0$ (これは，$\langle i_1, i_2, i_4\rangle$ とともに G^8 を生成する) もまた固定するので[10]，これは極大部分群ではない．一つの環 G^8 は 4 つの環 G^{4-} をこのように含む．例えば，その一つの環は

$$\langle i_1, i_2, i_4\rangle,\ \langle i_1, i_5, i_6\rangle,\ \langle i_2, i_3, i_5\rangle,\ \langle i_4, i_6, i_3\rangle$$

を含む．

環 $\mathsf{E}^2 = \mathbb{Z}[\omega]$ 上での推移性は "ω 達" 上での推移性から従う．E^4 あるいは E^8 のタイプの環は E^2 のタイプのものをただ一つ (それは奇数位数の元で生成される) を含み，その安定化群は極大部分群ではない．その推移性の証明は興味をもった読者に残しておく[11]．

図 10.4 は，単元環 (といくつかの他の物) の間の包含関係を表している．それらについてのさらに詳しい議論は次の節にある．二つの例外はあるが，単元で生成されるあらゆるループは，これらの単元環の一つに属する単元たちのループである．例外は自明群 C_1 と，ω で生成される位数 3 の群 C_3 とである．これらの包含関係を付け加えると，図 10.4 は単元ループの包含関係としても完全なものになる．11 章では，八元整数を 2 を法として考えることにより 4 個の非単元環 K^1, K^2, K^4, K^8 を得るが，K^8 をこの図の中に含めて描いてある．

---

8) ある $\langle i\rangle$ で生成された G^2 に対応している G^8 は，その i と偶直交する "i 達" によって生成される．

9) $\mathsf{G}^{4+} = \langle i, j, k\rangle$ に対応している H^4 は $\langle i, j, k, \frac{1}{2}(-1+i+j+k)\rangle$ である．H^8 は，これとそれに直交するすべての "i 達" とによって生成される．

10) "i 達" で i_1, i_2, i_4 と偶直交するのは，$\pm i_0$ のみである．

11) $\langle\omega\rangle$ に直交する 36 個の $\langle i\rangle$ 達は 12 個の三つ組にまとめられる．その任意の一つの三つ組を付け加えると一つの E^4 になるが，一つの E^8 はそれらのうちの適当な 3 個を付け加えることで得られる．

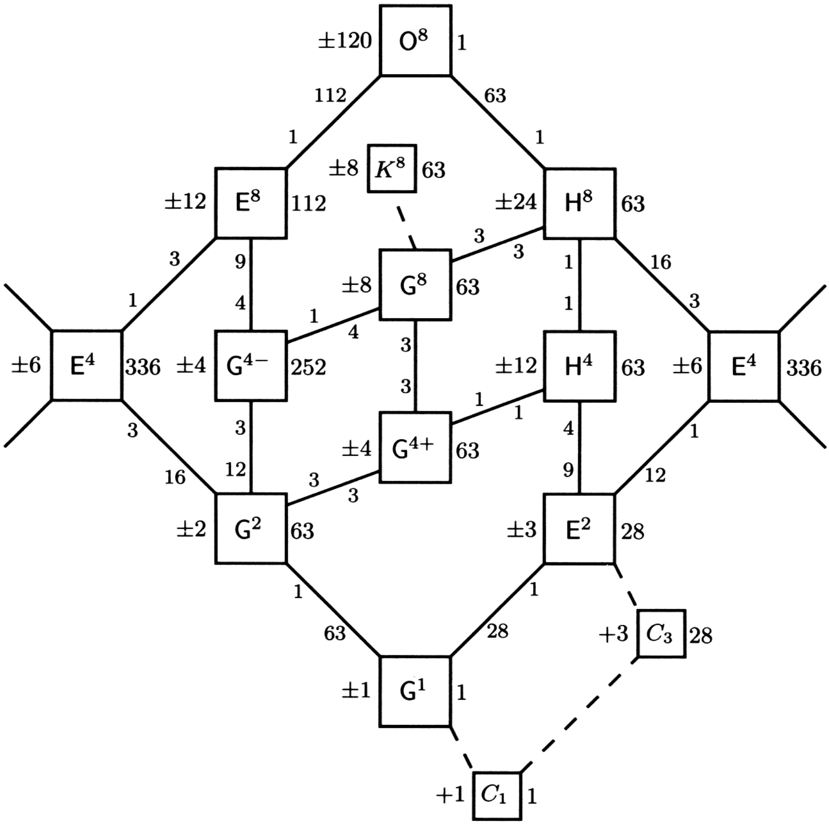


図 10.4 O^8 のいくつかの部分物 (subthings) の間の包含関係．$\pm n$ は，反対単元のペアを n 個もつ環の前に付けられている．$+n$ は，n 個の単元からなる群の前に付けられている．n は n 個のそのような物の一つの後に付けられている (すなわち，そのような物が全部で n 個あるということ)．線にあてがわれている数は包含関係の個数を表している．例えば，各々の E^4 は 3 個の H^8 に含まれ，一方，H^8 は 16 個の E^4 を含む．また，図の簡便のため E^4 は左右の両側に置かれている．

10.5 単元部分環の安定化

続くいくつかの節で，さらに詳しい情報を与えよう．一般の四元数的な部分システム Q^4 (三つ組 i, j, k で張られたもの) は，Q^8 をディクソンの二重化 $Q^4 + hQ^4$ (ここで h は "二重化子 (doubler)") とみなして 6.6 節のアイデアと第 4 章の記号を用いることにより，一定の方式で記述することができる．G^{4+} は明らかにそれを含むただ一つの H^4 と同一の安定化群をもつから，それについては議論の必要はない．残りの場合においては，Q^8 は Q^4 とそれに直交する単元たちとで生成されるので，Stab(Q^4) は Stab(Q^8) に含まれる．

10.5.1 部分環 G^{4-}

一つの例は，$i = i_1$, $j = i_2$, $k = i_4$ で生成されるものであり，それの適当な二重化子は $h = i_0$ である．次の表 (添字だけを載せている) は，それらの上での自己同型群の生成元の作用を示している[12]．

	i	j	k	h	hi	hj	hk
$[u,v]$	1	2	4	0	3	6	5
$[\omega,\omega]$	2	4	1	0	6	5	3
$[\zeta,\zeta]$	2	1	$\overline{4}$	0	6	3	$\overline{5}$
$[i,i]$	1	$\overline{2}$	$\overline{4}$	0	3	$\overline{6}$	$\overline{5}$
$[1,-1]$	1	2	4	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$

$$\omega = \tfrac{-1+i+j+k}{2}$$

$$\zeta = \tfrac{i+j}{\sqrt{2}}$$

これらは確かに (自己同型群を) 生成する．なぜならば，最初の 3 個は $\langle i_1, i_2, i_4\rangle$ のすべての自己同型写像を生成するので，さらに必要となる生成元は i_1, i_2, i_4 を固定するとしてもよく，i_1, i_2, i_4 それぞれに偶直交する "i 達" は $\pm i_0$ だけであるため，その生成元は i_0 を $\pm i_0$ に写すしかないからである．

第 4 章の記法に従えば，Stab(G^{4-}) の構造は，

$$\pm\frac{1}{24}[O \times O]$$

である．なぜならば，$-1 = [1, -1]$ があり[13]，そして，$[\omega,\omega]$, $[\zeta,\zeta]$, $[i,i]$ は L

[12] [訳注] $[u, v]$ は $x + hy \in H = \langle i, j, k\rangle + h\langle i, j, k\rangle$ を $\overline{u}xu + h.\overline{u}yv$ に写す (第 6 章の補遺を参照).

[13] [訳注] それゆえ，群は 2 倍体であり ± が付けられる．

と R と (それらは両方ともに，対になった八面体群 $2O = \langle \omega, \zeta, i \rangle$ のコピー) の間の恒等自己同型写像を定めるから[14]である．

ある G^8 (例えば $\langle i_n \rangle$ [15]) を固定する任意の自己同型写像は，真ん中の元[16]で生成される G^2 (ここでは $\langle i_0 \rangle$) も固定する．$\pm i_0$ に偶直交する "i 達" は他の $\pm i_n$ であるので，この逆もまた成り立つ．任意の $\mathsf{G}^{4-} = \langle i, j, k \rangle$ は，i, j, k の真ん中の元[17] h を付加して得られる $\mathsf{G}^8 = \langle h, i, j, k \rangle$ に一意的に拡大される．$\mathsf{G}^{4-} = \langle i_1, i_2, i_4 \rangle$ の場合は $\mathsf{G}^8 = \langle i_n \rangle$ となるが，逆に，それはちょうど 4 個の G^{4-}，すなわち，

$$\langle i_1, i_2, i_4 \rangle \quad \langle i_1, i_5, i_6 \rangle \quad \langle i_2, i_3, i_5 \rangle \quad \langle i_4, i_6, i_3 \rangle$$

を含んでいる．したがって，$\mathrm{Stab}(\mathsf{G}^{4-})$ は $\mathrm{Stab}(\mathsf{G}^8) = \mathrm{Stab}(\mathsf{G}^2 = \langle i_0 \rangle)$ の指数 4 の部分群となる．

10.5.2 部分環 H^4

この場合には，$i = i_0$, $j = i_1$, $k = i_3$ ととることにより，この部分環の一例が与えられる．さらに，$h = i_6$ ととると，次の表にあるような自己同型写像がみつかる．

	i	j	k	h	hi	hj	hk
$[u, v]$	0	1	3	6	2	5	4
$[\omega, 1]$	1	3	0	$\leftarrow 6254^* \rightarrow$			
$[\zeta, \zeta]$	$\overline{0}$	3	1	6	$\overline{2}$	4	5
$[k, k]$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	3	6	$\overline{2}$	$\overline{5}$	4
$[j, j]$	$\overline{0}$	1	$\overline{3}$	6	$\overline{2}$	5	$\overline{4}$
$[1, -1]$	0	1	3	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$
$[1, i]$	0	1	3	2	$\overline{6}$	$\overline{4}$	5
$[1, j]$	0	1	3	5	4	$\overline{6}$	$\overline{2}$
$[1, k]$	0	1	3	4	$\overline{5}$	2	$\overline{6}$

$$\omega = \frac{-1+i+j+k}{2}$$

$$\zeta = \frac{j+k}{\sqrt{2}}$$

14) [訳注]　それゆえ，$\frac{1}{24}$ が付いている．

15) [訳注]　$\langle i_1, i_2, i_4, i_0, i_3, i_6, i_5 \rangle$ を意味する．

16) [訳注]　i_0，すなわち G^4 を G^8 に拡大する二重化子のこと．

17) [訳注]　"the middle element h of i, j, k" の訳であるが，その意味は，$\mathsf{G}^4 = \langle i, j, k \rangle$ にディクソンの二重化を行って $\mathsf{G}^4 = \langle h, i, j, k \rangle$ を得るときの二重化子 h のこと．

これらは次の構造

$$\pm\frac{1}{2}[O \times \overline{D_8}]$$

をもつ群を生成する．なぜならば，これらには $-1 = [1, -1]$ があり[18]，ω によって $2O$ に拡大するような $2D_8$ が i, j, k, ζ によって生成され[19]，そして“右核”は巡回群ではない[20]からである．これは，H^4 のすべての自己同型写像を生成し，そしてすべての H^4-安定化群を含んでいることは容易に確かめられるので，これが全体の群となる．

直交する単元を付加することにより，同一の安定化群をもつ H^8 が一つ得られる．なぜならば，H^4 は位数 3 の元によって生成される (唯一の) 部分環としてその環から復元されるからである．

10.5.3 部分環 E^4

符号を無視すると，E^4 の単元は

$$1,\ \omega,\ \overline{\omega},\ i,\ i' = \omega i,\ i'' = \overline{\omega} i$$

であり，それに直交する単元は

$$j,\ j' = \omega j,\ j'' = \overline{\omega} j,\ k,\ k' = \omega k,\ k'' = \overline{\omega} k$$

である．ここで，i, j, k は奇四元三つ組であり，$\omega = \frac{1}{2}(-1 + h\sqrt{-3})$ である[21]．これらのすべてを方形の配列で表すと，次のようになる．

1	ω	$\overline{\omega}$
i	i'	i''
j	j'	j''
k	k'	k''

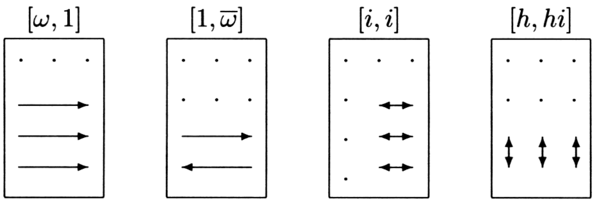
18) [訳注] それゆえ ± がついている．

19) [訳注] それゆえ $\frac{1}{2}$ がついている．

20) [訳注] それゆえ $\overline{}$ がついている．

21) [訳注] 実係数ですべてのことを行っているので，$\sqrt{-3}$ は複素数値としてそのまま解釈するのではなく，$\sqrt{-3} = i + j + k$ と解釈する．したがって，$\omega = \frac{1}{2}(-1 + h(i + j + k))$ である．さらに具体的に述べると，$i = i_1$, $j = i_2$, $k = i_4$, $h = i_0$ とするとき，$\omega = \frac{1}{2}(-1 + i_0(i_1 + i_2 + i_4)) = \frac{1}{2}(-1 + i_3 + i_5 + i_6))$ となる．

すると，次のように作用する (符号は無視)，4 個の自己同型写像[22] がみつかる．



これらは，4 章の記法で

$$+\frac{1}{4}[D_{12} \times \overline{D_{12}}]$$

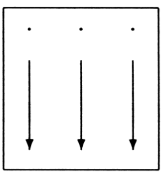
という構造をもつ群[23]を生成する (なぜならば，$[1,-1]$ がなくて[24]，u 達と v 達とは，それぞれ D_{12} 達を生成し，それは $\langle\omega\rangle$ を法として D_4 に写されるが，その "巡回的剰余類 (cyclic coset)" $\langle h\rangle$ は非巡回的な $\langle hi\rangle$ と交換されるから)．これが安定化群全体であることは，最初の写像が E^4 の安定化群を生成し，他の 3 個が E^4 のすべての自己同型写像を生成することからわかる．

次の例，

∞	$\overline{\infty}365$	$\overline{\infty 365}$
1	$\overline{0165}$	$0\bar{1}6\bar{5}$
2	$\overline{0253}$	$0\bar{2}5\bar{3}$
4	$\overline{0436}$	$0\bar{4}3\bar{6}$

ここで，その自己同型写像は

(124)(365)



をみてわかるように，E^4 に直交する単元を付加することで，安定化群が 3 倍大きい E^8 を得る．

---

[22] ［訳注］ ここで表されている $[u,v]$ という形の写像には注意が必要である．ω，i を含む部分四元数体を Q とし，それを八元数体に拡張する二重化子を h' (これは本文中の h でない) とする (ここでは，$h'=j$ としている)．これを用いて八元数を $x+h'y$ と表すとき，写像 $[u,v]$ は，$[u,v]: x+h'y \mapsto \overline{u}xu + h'\overline{u}yv$ で定義される．また，$i=i_1$，$j=i_2$，$k=i_4$，$h=i_0$，$\omega=\frac{1}{2}(-1+i_3+i_5+i_6)$ とおくことにより，確かに $[\omega,1]$，$[1,\overline{\omega}]$，$[i,i]$ については，本文にあるような写像となるが，$[h,hi]$ については，うまくいかない．この点については著者に問い合わせ中である．

[23] この群が [41] には載っていないことは興味深い．その楕円的像は Goursat の最初の列挙からは除外されたからである．

[24] ［訳注］ それゆえ $+$ しかついていない．

補遺：定理 5 の証明

ここでは，次の定理の証明を行う．

定理 5. 奇数位数の元で生成される整数環には，自己同型を法として 4 種類のタイプ (G^1, E^2, H^4, O^8) があり，それらからディクソンの二重化によってすべての八元整数単元環が得られる (図 10.3 をみよ).

補題 2. 任意の単元環は，ω 達で生成される単元環からディクソンの二重化を行うことで得られる．

証明 X をすべての ω 達で生成される部分環とする．明らかに，X 内にない単元は i の一つでなければならない．しかし，またこの i は X 内の任意の単元 u に直交していなけらばならない (よって X にも直交). なぜなら，そうでなければ，$\pm ui$ は X に含まれない ω の一つになるからである．よって，i によって X をディクソンの二重化に拡大することができ，それを Y とおく．もしも必要であれば，X を Y で置き換えてこの議論を繰り返すことにより，補題が証明される．□

これは，定理を次の定理に帰着させる．

定理 6. ω 達で生成される環には 4 つのタイプ，すなわち G^1, E^2, H^4, O^8 がある．

証明 その環が高々一つの元で生成されるならば，それは明らかに G^1 か E^2 かのどちらかである．$\mathrm{Aut}(O^8)$ は $\langle\omega\rangle$ 達上で二重推移的であるから，任意の 2 個の "ω 達" (等しくも逆数でもないもの) で生成される環は，やはり一意的なタイプ，H^4 となる．その $H^4 = \langle i_0, i_1, i_3, \omega_{013}\rangle$ に，その外側にある任意の ω を付加することによりすべての O^8 が得られる，ということを簡単に確かめるだけで，証明は完了する．□

11

O を 2 を法として読む

11.1　なぜ 2 を法として読むか

$\mathbb{O}=\mathbb{O}^8$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ はほとんど単純群である．実際のところ，それは指数 2 の単純部分群をもつ．ところで，有限単純群は分類されているが，では，これはそのどれであろうか．答えをみつけるには，2 を法として読むのが一番である．

八元整数環を任意の素数 p で読むことによって，興味深い環を得ることができる．それは，通常の整数を p を法として読むことで興味深い環を得る (実際にはそれは体であるが) ことと同様である．正確には，二つの八元整数が p を法として合同であるとは，それらの差がある八元整数の p 倍であるときをいう．(すなわち，“p を法とした八元整数” とは，実は商環 $\mathbb{O}/p\mathbb{O}$ の元のことである．)

有限群 $G_2(p)$ (正確に書くと $G_2(\mathbb{F}_p)$) は p を法とした八元整数環 $\mathbb{O}$ の自己同型群として定義される．本書にはこの話題は重要ではないので，$G_2(p)$ の位数が $p^6(p^2-1)(p^6-1)$ であるという事実を引き合いに出すにとどめる．明らかに，$\mathbb{O}$ の任意の自己同型は p を法として読むことにより，$G_2(p)$ の元とすることができる．これは写像

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{O}) \to G_2(p)$$

を与えるが，これは，事実，$\mathbb{O}$ の恒等自己同型のみが (p を法として) 恒等自己同型に写されるので，埋め込み写像である．実際，$p=2$ の場合，それは同型

写像であり，上の式により，$G_2(2)$ も Aut(O) と同じ位数

$$2^6(2^2-1)(2^6-1)=12096$$

をもつ．

いま，我々が注目している群は $G_2(2)$ である．普通 $G_2(p)$ は単純であるが，その特殊な場合である $G_2(2)$ はそうではなく，指数 2 の単純な部分群 (それは分類表のどこかに現れる) をもつ．その単純群は，位数 9 の体上の 3×3 次の "ユニタリ" 行列の群 $U_3(3)$ である．$\mathcal{G}$ という記号でこの単純な部分群を表し，それを用いて $G_2(2)$ を $\mathcal{G}\cdot 2$ と表すことができる．

群論の研究者は，有限単純群の研究にはその極大部分群を定めることが最良の方法であることを知っている．群 $\mathcal{G}$ は (共役を除いて) 4 個の極大部分群をもっている：

$\mathcal{G}_{\mathsf{G}}$, 63 個のガウス部分環 G^2 の一つを安定化する，

$\mathcal{G}_{\mathsf{H}}$, 63 個のフルビッツ部分環 H^4 の一つを安定化する，

$\mathcal{G}_{\mathsf{E}}$, 28 個のアイゼンシュタイン部分環 E^2 の一つを安定化する，

$\mathcal{G}_{\mathsf{K}}$, 36 個のクライン部分環 K^1 の一つを安定化する．

表 11.1 一つのタイプの代数を固定する群のもとで，任意の与えられたタイプの代数はこの表で示されたような軌道[1] をなす．与えられた二つの代数[2] は，数の下に表されたタイプの代数を生成する．

	作用			
	$\mathcal{G}_{\mathsf{G}}$	$\mathcal{G}_{\mathsf{H}}$	$\mathcal{G}_{\mathsf{E}}$	$\mathcal{G}_{\mathsf{K}}$
63 個の G^2 上で	1 + 6 + 24 + 32 G^2 G^{4+} G^{4-} E^4	3 + 12 + 48 G^{4+} G^8 H^8	27 + 36 H^4 E^4	14 + 21 + 28 K^2 K^4 E^4
63 個の H^4 上で	3 + 12 + 48 G^{4+} G^8 H^8	1 + 6 + 24 + 32 G^{4+} G^8 H^8 O^8	9 + 54 H^4 H^8	21 + 42 K^4 H^8
28 個の E^2 上で	12 + 16 H^4 E^4	4 + 24 H^4 H^8	1 + 27 E^2 H^4	28 E^4
36 個の K^1 上で (mod 2)	8 + 12 + 16 K^2 K^4 E^4	12 + 24 K^4 H^8	36 E^4	1 + 14 + 21 K^1 K^2 K^4

1) ［訳注］ 軌道上の代数の個数を表記している．

2) ［訳注］ 軌道上にある二つの代数．

群 $\mathcal{G}\cdot 2$ は，4 つの群 $\mathcal{G}_{\mathsf{G}}\cdot 2$, $\mathcal{G}_{\mathsf{H}}\cdot 2$, $\mathcal{G}_{\mathsf{E}}\cdot 2$, $\mathcal{G}_{\mathsf{K}}\cdot 2$ に加えて，さらにもう一つの極大部分群，すなわち $\mathcal{G}$ 自身，をもっている．これらの中で三つのものだけが八元整数の部分環の安定化群として現れるが，4 個すべてが，2 を法とする八元整数の低い次元の部分環を安定化する．

最初の三つを得るためには，$\langle i_0\rangle$, $\langle i_0, i_1, i_3, \omega_{013}\rangle$, $\langle\omega\rangle$ を 2 を法として読めばよい．4 番目のものは，$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-7})$ の形をしたクライン整数 λ によって (2 を法として) 生成される環を固定する．したがって，それは二つの基底 (“j-フレーム” $1, j_0, \ldots, j_6$ と “k-フレーム” $1, k_0, \ldots, k_6$ と) も固定することになる．表 11.1 は 4 個すべての群が 4 つすべてのタイプの部分代数に作用する様子を表している．

11.2　2 を法とした E_8 格子

八元整数の格子を 2 を法として研究するとき，それらをいろいろなノルムで数え上げることが重要になる．第 9 章で述べたように，八元整数は E_8 ルート格子の縮小コピー[3]をなし，任意のノルム $n>0$ のベクトルの個数は，n の約数の立方の和の 240 倍に等しいということもすでにわかっている．

八元整数のノルム	1	2	3	4	5	...
その個数	240	2160	6720	17520	30240	...

しかしながら，我々が実際に必要としているものは**短いベクトル**(その意味はノルムが高々 2) の個数である．本書を自己完結的にするために，それらをその座標値の形から正確に数え上げよう：

$$\begin{array}{llccccccc} \text{ノルム 1} & \text{形：} & (\pm 1^1, 0^7) & & (\pm\frac{1}{2}^4, 0^4) & & & & \\ & \text{個数：} & 2^1.8 & + & 2^4.14 & & & = & 240, \end{array}$$

$$\begin{array}{llccccccc} \text{ノルム 2} & \text{形：} & (\pm 1^2, 0^6) & & (\pm\frac{1}{2}^4, \pm 1^1, 0^3) & & (\pm\frac{1}{2}^8) & & \\ & \text{個数：} & 2^2.28 & + & 2^5.14.4 & + & 2^8 & = & 2160. \end{array}$$

[3] ［訳注］ $\frac{1}{2}$ 倍に縮小されている．

さて，これらの短いベクトル間の 2 を法とした合同関係を考察する．

補題 1． $v \equiv -v$ という関係を除いて，短いベクトルの間の 2 を法とした合同関係は，ノルム 2 の直交するベクトル間の合同関係だけである．

証明　$v \equiv w$ であり，$v \neq \pm w$ と仮定しよう．必要ならば w を $-w$ で置き換えて，内積 $[v, w]$ は非負であると仮定してよい．ここで，v, w は短いベクトル (ノルム 2 以下) であることから (図 11.1 をみよ)，これらのノルムに関して

$$[v - w] \leq [v] + [w] \leq 4$$

となる．しかし，$v - w \in 2\mathrm{O}^8$ であるから $[v - w] \geq 4$ となり，したがって $[v - w] = 4$ が得られるが，これは $[v] = [w] = 2$ かつ $[v, w] = 0$ を意味する．

□

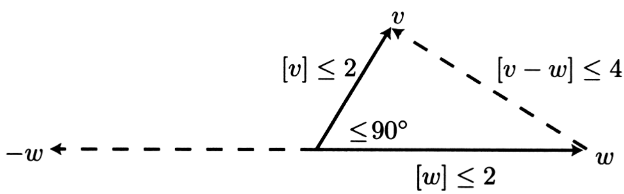


図 11.1　$[v, w] \geq 0$ ならば $[v - w] \leq 4$.

8 次元空間には互いに直交するベクトルは高々 8 個しかないので，任意の同値類にはノルム 2 のベクトルは高々 16 個しか属していない．よって，短いベクトルを含んでいる同値類の個数は少なくとも

$$1 + \frac{240}{2} + \frac{2160}{16} = 1 + 120 + 135 = 256 = 2^8$$

である．ところが，$\mathrm{O}^8/2\mathrm{O}^8$ は位数 2 の体上の 8 次元空間であるので，これは同値類の総数でもある．したがって，次を得る．

定理 1． 2 を法とした各々の合同類は短いベクトルを含んでいる．それらは，0 ベクトルで代表される 1 個の合同類，ノルム 1 の 2 個のベクトル $\pm v$ で代表される 120 個の合同類，ノルム 2 の 16 個のベクトル $\pm v_1, \ldots, \pm v_8$ のフレームで代表される 135 個の合同類である．3 番目の場合には，$v_1, \ldots, v_8$ は互いに直交しており，ノルム 2 の任意のベクトルはこのようなフレーム上にある．

これ以降，この合同類を “ベクトル (mod 2)” とよぶことにする．その乗法的な構造でそれらを分けると次のようになる[4]．

ノルム	タイプ	総数
0	1 個の 0	1
1	1 個の ± 1, 63 個の $\pm i$, 56 個の $\pm\omega$	120
2	63 個の $1+i$, 72 個の λ	135
		$256 = 2^8$

タイプ $1+i$ のベクトルの 16 個の最小代表元は，$\pm 1 \pm i$ の形の 4 個と，$\pm i' \pm i''$ の形の 12 個とである．例えば $1+i_0$ についてならば，

$$\pm 1 \pm i_0,\ \ \pm i_1 \pm i_3,\ \ \pm i_2 \pm i_6,\ \ \pm i_4 \pm i_5$$

のようになる．

タイプ λ はまだでてきていないものである．その 16 個の最小代表元は，-7 の種々の八元平方根[5]に対して，$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{-7})$ という形をしている．$G_2(2)$ は 72 個の “λ” 達の上で推移的である．しかしながら，$\langle\lambda\rangle$ (mod 2) という形の代数は 36 個しかない．なぜなら，与えられた λ で生成された代数はもう一つのもの，すなわち $\mu \equiv 1+\lambda$ を含むからである．その標準的な場合は，

$$\lambda = i_{\overline{\infty}0123456} = \frac{-1+i_0+\cdots+i_6}{2}$$

と

$$\mu = i_{\infty 0123456} = \frac{1+i_0+\cdots+i_6}{2}$$

とである．μ の 16 個の最小代表元は

$$\pm i_{\infty 0123456},\ \ \pm i_{\infty 01\bar{2}3\overline{456}},\ \ \ldots\ (\text{全部で 8 個})$$

4) ［訳注］ この表にある i は，第 10 章で “i 達” とよんでいるものである．具体的には，$\pm i_0, \ldots, \pm i_6$ および $\frac{1}{2}(\pm i_a \pm i_b \pm i_c \pm i_d)$ $(abcd = 0124, 0235, 0346, 1236, 0561, 1345, 2456)$ であり，総数 126 個ある．

5) ［訳注］ -7 の八元平方根 $\sqrt{-7}$ は，128 個の $\pm i_0 \pm i_1 \pm i_2 \pm i_3 \pm i_4 \pm i_5 \pm i_6$ と 448 個の $\pm i_a \pm i_b \pm i_c \pm 2i_d$ $(abc = 356,\ 146,\ 125,\ 450,\ 234,\ 602,\ 013,\ d \neq \infty, a, b, c)$ とである．

である[6)]．ある ω を，それに直交する i に加えて得られるベクトルはタイプ λ であり，逆に，タイプ λ のものはそのように (数多くの方法で) 表現される．

このペア λ, μ は，座標フレーム $1, j_0, \ldots, j_6$ と $1, k_0, \ldots, k_6$ とを決定し，またそれらによって決定される．この j 達と k 達とは合同関係

$$j_n\mu \equiv \mu \equiv \mu k_m \quad \text{および} \quad \lambda j_n \equiv \lambda \equiv k_m\lambda$$

からみつけられるが，逆に，μ はそれらから決定される．その理由は，$(1+j_m)(1+k_n)$ という 49 通りの積の中で，2 を法として 0 ではない 28 個の値は μ に合同であるという事実である．

これら 2 個の関連し合ったフレームは，j_m と k_{-m} とを入れ換えて群の位数を 168 から 336 に増やすような元 δ によって交換される．図 11.2 にあるように，射影平面上で，k 達を点とみなし，j 達を線とみなすことができる．よって，新しい群はこの平面の自己同型群 $L_3(2)$ の双対性による拡大となり，それ

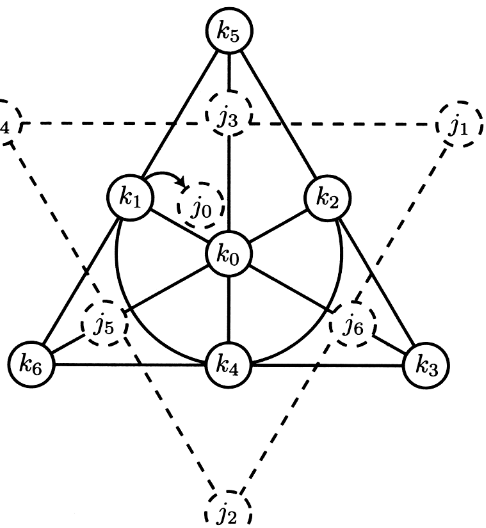


図 11.2 位数 2 の射影平面において，k 達を頂点とみなすと j 達が線となり，そしてその逆にもなる．

---

6) [訳注] すなわち，$\overline{}$ がついている添字は，∞ を含まない 8 個の 0-集合である．

はまた $PGL_2(7)$ とも考えられる．これは $\mathcal{G}\cdot 2$ の 4 番目の極大部分群であり，それゆえ，次節ではそれに専念することとする．

11.3 何が $\langle\lambda\rangle$ を固定するか

座標**フレーム**とは，16 個のベクトル $\pm1, \pm v_0, \pm v_1, \ldots, \pm v_6$ で，$1, v_0, v_1, \ldots, v_6$ が $\mathbb{O}^8$ 内の互いに直交している単元であるもののことである．偶四元三つ組と奇四元三つ組とがあるように，偶フレームと奇フレームともある．**偶フレーム (even frame)** とは偶四元三つ組を含むようなもののことであり，**奇フレーム (odd frame)** とはその中のすべての四元三つ組が奇であるようなもののことである．

補題 2. 互いに奇直交する任意の二つの “i” 達は，ちょうど三つのフレームに属し，その一つは偶で，残りの二つは奇である．

証明 二つの “i” 達を i_3 および i_5 ととることができる．“i” 達の中でこれらに直交するものは，(第 10 章の記法で)

$$\pm i_6,\ \pm i_0,\ \pm i_1,\ \pm i_2,\ \pm i_4,\ i^*_{0124}$$

であり，これらのベクトルの中から選んでできるフレームは，$\pm1, \pm i_3, \pm i_5, \pm i_6$ に次のいずれかを加えたものである[7]．

$\pm i_0, \pm i_1, \pm i_2, \pm i_4$	または	i'_{0124}	または	i''_{0124}
i-フレーム		**j-フレーム**		**k-フレーム**.

i_0, i_1, i_3 は偶三つ組であるから，i-フレームは偶である．次の節の計算によって，j-フレームは奇であることを示す．j-フレームと k-フレームとは，i_0, i_3, i_5, i_6 を負に写す対称性によって移りあうので，k-フレームも奇であることになる．

---

7) [訳注] i'_{0124} は $\pm\frac{-i_0+i_1+i_2+i_4}{2}, \pm\frac{i_0-i_1+i_2+i_4}{2}, \pm\frac{i_0+i_1-i_2+i_4}{2}, \pm\frac{i_0+i_1+i_2-i_4}{2}$ を表し，i''_{0124} は $\pm\frac{i_0+i_1-i_2-i_4}{2}, \pm\frac{i_0-i_1+i_2-i_4}{2}, \pm\frac{i_0-i_1-i_2+i_4}{2}, \pm\frac{i_0+i_1+i_2+i_4}{2}$ を表し，i^*_{0124} はその両方を表す．

11.3.1 計　　算

j-フレームの対称性をみるには，その中にあるすべての単位八元数を表現するともっとも容易である．次のように定義する：

$$j_3 = -i_6,\ j_6 = -i_5,\ j_5 = -i_3,\ j_0 = i_{\bar{0}124},\ j_1 = i_{0\bar{1}24},\ j_2 = i_{01\bar{2}4},\ j_4 = i_{012\bar{4}}.$$

この変換は，容易にその逆変換をとることができる：

$$i_3 = -j_5,\ i_6 = -j_3,\ i_5 = -j_6,\ i_0 = j_{\bar{0}124},\ i_1 = j_{0\bar{1}24},\ i_2 = j_{01\bar{2}4},\ i_4 = j_{012\bar{4}}.$$

($j_0 + j_1 = i_2 + i_4$,　$j_0 - j_1 = i_1 - i_0, \ldots$ などの等式に注意するとわかりやすい．)

このとき，次の関係式

$$j_0 j_1 = j_{23\bar{4}6},\quad j_1 j_2 = j_{34\bar{5}0},\quad \ldots,\quad j_6 j_0 = j_{12\bar{3}5}$$

を容易にみつけることができるが，際だったことに，この関係式は

$$\alpha : (01\ldots6)\,,\qquad \beta : (124)(365)$$

という添字の置換によって不変である．

α と β とによる不変性，および，$j_n^2 = -1$ かつ $j_n j_m = \overline{j_m j_n}$ という事実を用いることにより，j 乗法表を完成させることができる．

1	j_0	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6
j_0	-1	$j_{2\bar{4}63}$	$j_{4\bar{1}56}$	$j_{\overline{41}5\overline{6}}$	$j_{1\bar{2}35}$	$j_{\overline{24}6\overline{3}}$	$j_{\overline{12}3\overline{5}}$
j_1	$j_{\overline{23}4\overline{6}}$	-1	$j_{3\bar{5}04}$	$j_{5\bar{2}60}$	$j_{\overline{52}6\overline{0}}$	$j_{2\bar{3}46}$	$j_{\overline{35}0\overline{4}}$
j_2	$j_{\overline{46}1\overline{5}}$	$j_{\overline{34}5\overline{0}}$	-1	$j_{4\bar{6}15}$	$j_{6\bar{3}01}$	$j_{\overline{63}0\overline{1}}$	$j_{3\bar{4}50}$
j_3	$j_{4\bar{5}61}$	$j_{\overline{50}2\overline{6}}$	$j_{\overline{45}6\overline{1}}$	-1	$j_{5\bar{0}26}$	$j_{0\bar{4}12}$	$j_{\overline{04}1\overline{2}}$
j_4	$j_{\overline{15}2\overline{3}}$	$j_{5\bar{6}02}$	$j_{\overline{61}3\overline{0}}$	$j_{\overline{56}0\overline{2}}$	-1	$j_{6\bar{1}30}$	$j_{1\bar{5}23}$
j_5	$j_{2\bar{6}34}$	$j_{\overline{26}3\overline{4}}$	$j_{6\bar{0}13}$	$j_{\overline{02}4\overline{1}}$	$j_{\overline{60}1\overline{3}}$	-1	$j_{0\bar{2}41}$
j_6	$j_{1\bar{3}52}$	$j_{3\bar{0}45}$	$j_{\overline{30}4\overline{5}}$	$j_{0\bar{1}24}$	$j_{\overline{13}5\overline{2}}$	$j_{\overline{01}2\overline{4}}$	-1

j-フレームを保存する任意の対称性は，対応する k-フレームも保存することがわかる．すなわち，次のように定義すると，これは α と β との両方で不変である．

$$
\begin{aligned}
k_0 &= j_{0\overline{124}} = -i_0 \\
k_1 &= j_{1\overline{235}} = i_{\overline{1}263} \\
k_2 &= j_{2\overline{346}} = i_{\overline{2}456} \\
k_3 &= j_{3\overline{450}} = i_{\overline{1263}} \\
k_4 &= j_{4\overline{561}} = i_{\overline{4}135} \\
k_5 &= j_{5\overline{602}} = i_{\overline{4135}} \\
k_6 &= j_{6\overline{013}} = i_{\overline{2456}}
\end{aligned}
$$

すると，次の計算

$$k_0k_1 = -i_0i_{1\bar{2}63} = i_{3\bar{6}21} = j_{04\bar{5}3}\,, \qquad j_6k_0 = i_{\bar{5}}i_{\bar{0}} = i_4 = j_{012\bar{4}}$$

と α および β の対称性とから，表 11.2 および表 11.3 が得られる．

奇フレームは二つの種類，**j-フレーム**と **k-フレーム**とに分けられる．ある自己同型写像はそれらの各々の種類を全体として固定するか (そのとき，その自己同型写像を “偶” 自己同型とよぶ)，あるいは入れ替えるか (そのとき，それを “奇” とよぶ) である．

与えられた一つの j-フレームを固定する対称性は，$L_3(2)$ あるいは $L_2(7)$ として知られる位数 168 の単純群となり，それはある特別な k-フレームも固定する．それを，はじめの j-フレームに “付随した k-フレーム” とよぶ．標準的な付随フレームのペアを選ぶと，それらを固定する対称性は，次のように作用する α, β, γ で生成される．

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha &\ : (01\ldots6) \\
\beta &\ : (124)(365)
\end{aligned}
\right\}
\quad j\text{-添字と } k\text{-添字との両方に作用}
$$

$$
\gamma :
\begin{aligned}
&(56)(14)\,\epsilon_{0124} && j\text{-添字に作用} \\
&(12)(36)\,\epsilon_{0365} && k\text{-添字に作用.}
\end{aligned}
$$

群 $\mathcal{G}_{\mathsf{K}} \cong L_3(2)\cdot 2$ の種々の物への作用は，表 11.3 で簡単に確認することができ，そこには，j-フレームに関する 240 個の単元が表示されている ($j_{abcd} = \frac{1}{2}(j_a + j_b + j_c + j_d)$ などの記号が用いられている)．

表 11.2　j 達および k 達についての乗法表．記号の定義は表 11.3 をみよ．

1	j_0	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6
j_0	-1	i_{52}	i_{34}	$-i_{24}$	i_{61}	$-i_{12}$	$-i_{41}$
j_1	$-i_{52}$	-1	i_{63}	i_{45}	$-i_{35}$	i_{02}	$-i_{23}$
j_2	$-i_{34}$	$-i_{63}$	-1	i_{04}	i_{56}	$-i_{46}$	i_{13}
j_3	i_{24}	$-i_{45}$	$-i_{04}$	-1	i_{15}	i_{60}	$-i_{50}$
j_4	$-i_{61}$	i_{35}	$-i_{56}$	$-i_{15}$	-1	i_{26}	i_{01}
j_5	i_{12}	$-i_{02}$	i_{46}	$-i_{60}$	$-i_{26}$	-1	i_{30}
j_6	i_{41}	i_{23}	$-i_{13}$	i_{50}	$-i_{01}$	$-i_{30}$	-1

1	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
k_0	-1	i_{63}	i_{56}	$-i_{61}$	i_{35}	$-i_{34}$	$-i_{52}$
k_1	$-i_{63}$	-1	i_{04}	i_{60}	$-i_{02}$	i_{46}	$-i_{45}$
k_2	$-i_{56}$	$-i_{04}$	-1	i_{15}	i_{01}	$-i_{13}$	i_{50}
k_3	i_{61}	$-i_{60}$	$-i_{15}$	-1	i_{26}	i_{12}	$-i_{24}$
k_4	$-i_{35}$	i_{02}	$-i_{01}$	$-i_{26}$	-1	i_{30}	i_{23}
k_5	i_{34}	$-i_{46}$	i_{13}	$-i_{12}$	$-i_{30}$	-1	i_{41}
k_6	i_{52}	i_{45}	$-i_{50}$	i_{24}	$-i_{23}$	$-i_{41}$	-1

1	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
j_0	ω_{00}	i_{01}	i_{02}	$-\omega_{03}$	i_{04}	$-\omega_{05}$	$-\omega_{06}$
j_1	$-\omega_{10}$	ω_{11}	i_{12}	i_{13}	$-\omega_{14}$	i_{15}	$-\omega_{16}$
j_2	$-\omega_{20}$	$-\omega_{21}$	ω_{22}	i_{23}	i_{24}	$-\omega_{25}$	i_{26}
j_3	i_{30}	$-\omega_{31}$	$-\omega_{32}$	ω_{33}	i_{34}	i_{35}	$-\omega_{36}$
j_4	$-\omega_{40}$	i_{41}	$-\omega_{42}$	$-\omega_{43}$	ω_{44}	i_{45}	i_{46}
j_5	i_{50}	$-\omega_{51}$	i_{52}	$-\omega_{53}$	$-\omega_{54}$	ω_{55}	i_{56}
j_6	i_{60}	i_{61}	$-\omega_{62}$	i_{63}	$-\omega_{64}$	$-\omega_{65}$	ω_{66}

表 11.3　表 11.2 にあるように，それが “i” 達の一つであるとき $j_m k_n = i_{mn}$ と書き，そうでないとき $j_m k_m = \omega_{mm}$，$j_m + k_m = h_{mm}$，$j_m k_n = -\omega_{mn}$，$j_m - k_n = h_{mn}$ と書く．この記号は $L_3(2)$ の作用の下で (2 を法として) 不変になるように選ばれている．

$abcd$	$j_{\bar{a}bcd}$	$j_{a\bar{b}cd}$	$j_{ab\bar{c}d}$	$j_{abc\bar{d}}$	j_{abcd}	$j_{\bar{a}\bar{b}cd}$	$j_{\bar{a}b\bar{c}d}$	$j_{\bar{a}bc\bar{d}}$
0124	$-k_0$	i_{50}	i_{30}	i_{60}	h_{00}	$-h_{10}$	$-h_{21}$	$-h_{40}$
1235	$-k_1$	i_{61}	i_{41}	i_{01}	h_{11}	$-h_{21}$	$-h_{32}$	$-h_{51}$
2346	$-k_2$	i_{02}	i_{52}	i_{12}	h_{22}	$-h_{32}$	$-h_{43}$	$-h_{62}$
3450	$-k_3$	i_{13}	i_{63}	i_{23}	h_{33}	$-h_{43}$	$-h_{54}$	$-h_{03}$
4561	$-k_4$	i_{24}	i_{04}	i_{34}	h_{44}	$-h_{54}$	$-h_{65}$	$-h_{14}$
5602	$-k_5$	i_{35}	i_{15}	i_{45}	h_{55}	$-h_{65}$	$-h_{06}$	$-h_{25}$
6013	$-k_6$	i_{46}	i_{26}	i_{56}	h_{66}	$-h_{06}$	$-h_{10}$	$-h_{36}$
∞653	ω_{00}	$-\omega_{20}$	$-\omega_{40}$	$-\omega_{10}$	$-\overline{\omega}_{00}$	$\overline{\omega}_{20}$	$\overline{\omega}_{40}$	$\overline{\omega}_{10}$
∞064	ω_{11}	$-\omega_{31}$	$-\omega_{51}$	$-\omega_{21}$	$-\overline{\omega}_{11}$	$\overline{\omega}_{31}$	$\overline{\omega}_{51}$	$\overline{\omega}_{21}$
∞105	ω_{22}	$-\omega_{42}$	$-\omega_{62}$	$-\omega_{32}$	$-\overline{\omega}_{22}$	$\overline{\omega}_{42}$	$\overline{\omega}_{62}$	$\overline{\omega}_{32}$
∞216	ω_{33}	$-\omega_{53}$	$-\omega_{03}$	$-\omega_{43}$	$-\overline{\omega}_{33}$	$\overline{\omega}_{53}$	$\overline{\omega}_{03}$	$\overline{\omega}_{43}$
∞320	ω_{44}	$-\omega_{64}$	$-\omega_{14}$	$-\omega_{54}$	$-\overline{\omega}_{44}$	$\overline{\omega}_{64}$	$\overline{\omega}_{14}$	$\overline{\omega}_{54}$
∞431	ω_{55}	$-\omega_{05}$	$-\omega_{25}$	$-\omega_{65}$	$-\overline{\omega}_{55}$	$\overline{\omega}_{05}$	$\overline{\omega}_{25}$	$\overline{\omega}_{65}$
∞542	ω_{66}	$-\omega_{16}$	$-\omega_{36}$	$-\omega_{06}$	$-\overline{\omega}_{66}$	$\overline{\omega}_{16}$	$\overline{\omega}_{36}$	$\overline{\omega}_{06}$

$h_{mm}=j_m + k_m$	$m = m$	$\omega_{mn}=-j_m k_n$	$m > n$
$h_{mn}=j_m - k_n$	$m > n$	$\omega_{mn}=\pm j_m k_n$	$m \geq n$
$i_{mn}=j_m k_n$	$m < n$	$h_{mn}=j_m \pm k_n$	$m \geq n$
$\omega_{mm}=j_m k_m$	$m = m$	$i_{mn}=j_m k_n$	$m < n$

11.4　単元環以外の 2 を法とした部分環

本節では，O^8 の 2 を法としたときの部分環は，2 を法とした単元環の他には次の 4 つの環だけである，ということの証明に専念する．

$$\mathrm{K}^1 = \langle\lambda\rangle,\quad \mathrm{K}^2 = \langle\lambda, i_0\rangle,\quad \mathrm{K}^4 = \langle\lambda, i_0, i_1, i_3\rangle,\quad \mathrm{K}^8 = \langle\lambda, i_0, \ldots, i_6\rangle,$$

ここで，$\lambda = \frac{-1+i_0+\cdots+i_6}{2}$ である．

補題 3.　2 個の λ 達で生成される環 $\langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ (ただし $\langle\lambda_1\rangle \neq \langle\lambda_2\rangle$) は，$\lambda_1$ とある i とでも生成される．

証明　λ_1 を $(+\frac{1}{2}^8)$ とし，そして λ_2 の座標が

$$(\pm\frac{1}{2}^8) \text{ または } (\pm\frac{1}{2}^4, \pm1, 0^3)$$

となるようにとれる．1 番目の場合，任意の 4 個の座標の符号を入れ替えることは，2 を法としたときの値に影響を及ぼさないので，それにより − の符号の個数を高々 2 個に減らすことができる．もしもそれがちょうど 2 個であるとき，それらの一つを 1 に[8]付けて，$\lambda_1 - \lambda_2$ が i または $i+1$ の形にすることができる．同様の理由により，2 番目の場合にも，$\frac{1}{2}$ についている "−" 符号は高々 1 個と仮定でき，$\lambda_1 - \lambda_2$ の座標は

$$(0^4, \pm\frac{1}{2}^4) \text{ または } (0^3, 1, \pm\frac{1}{2}^4)$$

となる (ただし，1 の係数は 0 か 1 かである)．1 番目はある i であり，2 番目はある $1+i$ かある $i+i'$ (2 を法として $1+i$ に合同) かである．□

補題 4.　ある λ とある ω とで生成された環は単元環である．

証明　次のように

$$\lambda = (\pm\frac{1}{2}^8),\quad \omega = (\pm\frac{1}{2}^4 0^4)$$

ととることができ，λ の代表元の選択をすることによりその符号を制御して，$\lambda - \omega$ が次のいずれかの形

8) [訳注]　実座標のこと．

$$(0^4, \pm\frac{1}{2}^4) \text{ または } (0^3, \pm 1, \pm\frac{1}{2}^4)$$

になるようにでき，それはある i かある $1+i$ かのどちらかである．この i によって，$\langle\lambda,\omega\rangle = \langle\omega, i\rangle$ となる．□

以上の二つの補題を組み合わせることにより，次を得る．

定理 2. 2 を法として，単元で生成されない任意の環は，次の 4 つのタイプ K^1, K^2, K^4, K^8 のいずれかである．

証明 2 を法として，単元でない任意の元はある λ かある $1+i$ かに合同であるので，すべての単元でない生成元は λ 達であると仮定してもよく，補題 3 より，それは二つのうちのただ一つでしかなく，補題 4 より，"ω" はそこには一つもない．それゆえ，この環の単元で生成された部分は，1 といくつかの互いに直交する "i" 達からなる．

一般性を失うことなく，生成元のうちの一つは上記の λ であると仮定できる．表 11.1 の最上段右側の部分から，この λ の安定化群は 3 個の軌道を "i" 達の上にもち，それらの二つはタイプ K^2 と K^4 とを導くが，3 番目のものは，ある ω を含む E^4 を導くので，無視してもかまわない．よって，任意の残された環として，この λ と $1, i_0, i_1, i_3$ と，そしてこれらに直交する 4 個の "i" 達 (それらは K^8 を導く i_2, i_4, i_5, i_6 か，対称性の下で互いに同値な i'_{2645} か i''_{2645} かである) とを含むように選ぶことができる．□



八元数射影平面 $\mathbb{O}P^2$

本書では，四元数と八元数の内部的な考察に専念してきた．その主な目的は，それらの理論の単純な自己完結した表現を与え，それらのもっとも自然な算術を与え，そしてそれらを含む空間の幾何への応用を与えることである．それらの，数学や物理学の他の部分への多くの応用のために，参考文献にある仕事について参照し，本書がそれらを読むときに役に立つようにしよう．

この最終章では，八元数のいくつかの "外部的" な応用について，簡単にふれることにする．

12.1 例外リー群と Freudenthal の "Magic Square"

実数と複素数上のコンパクト半単純リー (すなわち，連続) 群は次のように分類されている．ユニタリ (unitary)，直交 (orthogonal)，そしてシンプレクティック (symplectic) 群からなる無限の族 (カルタン (Cartan) の表記法で A_n, B_n, C_n, D_n)，そして，5 個の "例外 (exceptional)" 群 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 である．これらは八元数と密接な関係にあると理解されてきた，例えば，G_2 は八元数の自己同型群である．

Jordan, von Neumann, そして Wigner が 1934 年に "ジョルダン代数 (Jordan algebra)" [1]を分類したとき，彼らは，八元数上の 3×3 次 "ハミルトン (Hermitian)" 行列 (その自己同型群は F_4) からなる "例外" をみつけた．

[1] それらは，条件 $a \circ b = b \circ a$ かつ $a \circ (b \circ a^2) = (a \circ b) \circ a^2$ で定義される．この条件は，$A \circ B$ が $\frac{1}{2}(AB + BA)$ を意味するとしたとき，結合的環上の行列によって満たされる．例外のものは，結合的環から得られないものだけである．

1950 年代に，Freudenthal は 4 つの特異な “幾何” がすべて $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 上で定義されることを発見した．それは，楕円的平面と射影的平面上の幾何と 5 次元シンプレクティック幾何と (これらはすでに知られていた)，そして彼の新しい “メタシンプレクティック (metasymplectic)” 幾何とである．4 つの環上の 4 つの幾何の自己同型写像は，彼の有名な “Magic Square” をなす ([17] と [18] とをみよ).

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
楕円平面	B_1	A_2	C_3	F_4
射影平面	A_2	$A_2 + A_2$	A_5	E_6
5 次元シンプレクティック幾何	C_3	A_5	D_6	E_7
メタシンプレクティック幾何	F_4	E_6	E_7	E_8

J. Tits は Freudenthal と共同研究を行い，これらの幾何の性質を発見した.

12.2 四元射影平面

ある体上の**射影的** n **空間** (**projective** n**-space**) の通常の定義は，その体上の $(n+1)$ 次元ベクトル空間の 1 次元部分空間を 1 点とみなすものであり，したがって，任意の $\lambda \neq 0$ に対して $(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ が同一の点を定めると解釈することで，非ゼロの $(n+1)$ 組 $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ で座標づけられる．その k 空間は同様の同一視のもとでの $(k+1)$ 次元ベクトル部分空間であるから，特に，その典型的な超平面は x_i に関するある線形方程式を満たす点全体からなる.

特に, 2 次元複素射影空間の点は, $\lambda \neq 0$ に対して $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = (x_0, x_1, x_2)$ という解釈のもとで，複素数の非ゼロの三つ組 (x_0, x_1, x_2) で座標づけられており，また，線は x_0, x_1, x_2 に関する線形方程式によって特定される．もしも，3 次元複素ベクトル空間に通常のエルミート形式 $\overline{x_0}x_0 + \overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2$ によって内積が与えられているならば，その典型的な線を $x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = 0$ によって特定の点 (y_0, y_1, y_2) に直交するすべての点 (x_0, x_1, x_2) の集合として記述できる.

このことのすべては四元数に対しても適用できるが，しかし八元数に対しては適用できない．しかしながら，代替案 (ある物理的なアイディアとして最初に提案された) があり，それを用いると，$\mathbb{O}$ 上の 2 次元射影空間，または**射影平面 (projective plane)** を定義することに成功する．

複素射影平面の点 p を，$\mathbb{C}^3$ 内のそれに対応する 1 次元空間上への射影作用素によって表すことにしよう．$p = (1, 0, 0)$ に対しては，これは行列

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．一般には，その行列は**エルミート (Hermitian)** ($e_{ij} = \overline{e_{ji}}$) であり，**等方的 (idempotent)** ($e^2 = e$) であり，**単位トレース** ($e_{00} + e_{11} + e_{22} = 1$) をもっている．また，$\mathbb{C}^3$ 内の二つの 1 空間が直交するのは，それらの直交作用素 e と f とが $e \circ f = 0$ を満たすときである．ここで，$e \circ f$ は**ジョルダン積 (Jordan product)** $\frac{1}{2}(ef + fe)$ である．複素射影平面の線 f を，$e \circ f = 0$ を満たすすべての点 e として定義することができる．

実際には，この定義は $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ 上のすべての次元の射影空間を与える定義に拡張することができる．しかし，八元数 $\mathbb{O}$ 上では，それは射影平面をつくり出すが，それよりも高い次元の射影空間はつくれない．なぜならば，ジョルダン代数の性質が要求されるからである．したがって，**八元射影平面**を，八元数上の 3×3 次のエルミート行列で，等方的であり，トレース 1 をもつものによって特定された点と線とをもつものとして定める．ただし，$e \circ f = 0$ であるときに，点 e が線 f 上にあると定める．

この定義は数学的にもっともふさわしいものである．なぜならば，その平面は少なくとも例外ジョルダン代数の対称性 (それはリー群 F_4 をなす) をもつことが直ちに明らかになるからである．実際には，それは F_4 をさらに大きいリー群 E_6 に拡大した自己同型群のもとでも不変となる．しかしながら，それは大きくやっかいなものであるので，次節では，(Porteous [35] と Aslaksen [4] とによる) 対称性は少ないけれども，よく知られていて，より便利な “座標による定義” の同値関係を確立する．Freudenthal の定義によるその同値関係の議論は，Allcock [2] のエレガントな論文に従ったものである．

12.3 $\mathbb{O}P^2$ の座標

最初の補題は，行列を八元数のベクトルで置き換えることを可能にする．

補題 1. 任意の 3×3 次の等方的エルミート行列 e でトレースが 1 であるものは，ノルム 1 のベクトル (x_0, x_1, x_2) (ただし x_0 は実数) を用いて $e_{x_0,x_1,x_2} = (\overline{x_i}x_j)$ と表される．

証明 エルミート行列

$$e = \begin{pmatrix} a & \gamma & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & b & \alpha \\ \beta & \overline{\alpha} & c \end{pmatrix}, \qquad a+b+c=1$$

(ただし，$a, b, c \in \mathbb{R}$ かつ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{O}$) に対して，条件 $e^2 = e$ は次の 6 個の等式

$$\begin{aligned} a &= a^2 + [\beta] + [\gamma] & \qquad \overline{\gamma}\,\overline{\beta} &= (1-b-c)\alpha = a\alpha \\ b &= b^2 + [\gamma] + [\alpha] & \qquad \overline{\alpha}\,\overline{\gamma} &= (1-c-a)\beta = b\beta \\ c &= c^2 + [\alpha] + [\beta] & \qquad \overline{\beta}\,\overline{\alpha} &= (1-a-b)\gamma = c\gamma \end{aligned}$$

と同値である．左側の 3 個の等式から $a, b, c \geq 0$ が得られ，右側の 3 個の等式からは

$$[\beta][\gamma] = a^2[\alpha], \qquad [\gamma][\alpha] = b^2[\beta], \qquad [\alpha][\beta] = c^2[\gamma]$$

が得られ，よって，もしも $\alpha\beta\gamma \neq 0$ であるならば $[\gamma] = ab$ かつ $[\beta] = ac$ となる．上の補題を確かめるのは，次のようにおけば簡単である．

$$\begin{aligned} (x_0, x_1, x_2) &= (\sqrt{a}, \tfrac{\gamma}{\sqrt{a}}, \tfrac{\overline{\beta}}{\sqrt{a}}) && a \neq 0 \text{ のとき}, \\ (x_0, x_1, x_2) &= (0, \sqrt{b}, \tfrac{\alpha}{\sqrt{b}}) && a = 0, b \neq 0 \text{ のとき}, \\ (x_0, x_1, x_2) &= (0, 0, 1) && \text{その他の場合}. \end{aligned}$$

□

もちろん，x_1 と x_2 とのどちらでも同様に，それが実数であると要求することができる．その切り替えは容易である．例えば，次のようになる．

補題 2. $r_i \in \mathbb{R}$ と単元 u_i とを用いて $(x_0, x_1, x_2) = (r_0, r_1u_1, r_2u_2)$ と表したとき，$e_{x_0,x_1,x_2} = e_{\overline{u_1}x_0,r_1,\overline{u_1}x_2}$ である．

証明 "内積" の行列

	r_0	r_1u_1	r_2u_2
r_0	r_0^2	$r_0r_1u_1$	$r_0r_2u_2$
$r_1\overline{u_1}$	$r_0r_1\overline{u_1}$	r_1^2	$r_1r_2\overline{u_1}u_2$
$r_2\overline{u_2}$	$r_0r_2\overline{u_2}$	$r_1r_2\overline{u_2}u_1$	r_2^2

と

	$r_0\overline{u_1}$	r_1	$r_2\overline{u_1}u_2$
$r_0\overline{u_1}$	r_0^2	$r_0r_1u_1$	$r_0r_2u_2$
r_1	$r_0r_1\overline{u_1}$	r_1^2	$r_1r_2\overline{u_1}u_2$
$r_2\overline{u_2}u_1$	$r_0r_2\overline{u_2}$	$r_1r_2\overline{u_2}u_1$	r_2^2

とは同一のものである．□

さて，直交のための座標条件が，異なる位置に実座標値をもつ点と線とに対して働くことを示そう．

補題 3. x_0 と y_1 とが実数であるとき，$e = e_{x_0,x_1,x_2}$ と $f = e_{y_0,y_1,y_2}$ とに対して，

$$x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e \circ f = 0$$

が成立する．

証明 $x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = 0$ であるとき，例えば

$$(ef)_{02} = \overline{x_0}((x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2})y_2) = 0$$

であることをみよう．左辺は

$$\overline{x_0}x_0{\cdot}\overline{y_0}y_2 \qquad \overline{x_0}x_1{\cdot}\overline{y_1}y_2 \qquad \overline{x_0}x_2{\cdot}\overline{y_2}y_2$$

の和であるが，これらは

x_0は実数	y_1は実数	$\overline{y_2}y_2$は実数 二項結合性

という理由で，

$$\overline{x_0}(x_0\overline{y_0}\cdot y_2) \qquad \overline{x_0}(x_1\overline{y_1}\cdot y_2) \qquad \overline{x_0}(x_2\overline{y_2}\cdot y_2)$$

で置き換えることができる．

他の $(ef)_{ij}$ および $(fe)_{ij}$ も，01 と 10 との要素を除いてすべて消えるということを，同様の方法で示すためにちょうど十分な結合性がある．01 と 10 との要素については，最初に (x_0, x_1, x_2) を (x'_0, x'_1, x'_2) に再正規化して，x'_2 が実数であるようにしておく必要がある．

逆をいうためには，$e \circ f$ の (これは 0 であると仮定されている) 対角成分の和が三つの数の和

$$\sum_i [\overline{x_i}((x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2})y_i), 1]$$
$$= \sum_i [x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}, x_i\overline{y_i}] = [x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}]$$

であることを同様の方法で示す．したがって，実際に $x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$ が消えていることがわかる．□

次の最後の補題は，異なる二つの任意の線はちょうど 1 点を通り，そして異なる二つの任意の点はちょうど一つの線上にある，ということを示すことにより，“射影平面” という用語を正当化する．

補題 4. (y_0, y_1, y_2) と (z_0, z_1, z_2) とを比例しない単位ベクトルで，y_1 と z_1 とが実数であるものとする．このとき，二つの等式

$$x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = 0, \qquad x_0\overline{z_0} + x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} = 0$$

および x_0 が実数であるという条件は，(x_0, x_1, x_2) を射影的に一意に定める．

証明 x_0 の x_2 に対する比は

$$(x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2})\overline{z_1} \quad \text{から} \quad (x_0\overline{z_0} + x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2})\overline{y_1}$$

を引くことで得られ，また x_1 は両方の等式から決定される．□

以上で次の定理の証明を終える．

定理 1. 八元数の三つ組 (x_0, x_1, x_2) が**特殊**[2]であるとは，その中の少なくとも一つが実数であるときをいう．(x_0, x_1, x_2) と $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ との両方が特殊であるとき，それらを同一視する．(x_0, x_1, x_2) と (y_0, y_1, y_2) とが**直交**しているとは，それらが異なる場所に実数座標をもち，$x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = 0$ であるときをいう．このとき，特殊三つ組みで八元射影平面上の点および線をパラメトライズすることができる．ある点とある線とが接続しているのは，それらの三つ組みが直交しているときである．

この平面が非常に興味深いものであるその理由は，それが抜きん出て対称的なものであるということであり，それは 52 次元の実リー群 E_6 をその自己同型群としてもつ．ここで与えた定義は，そのような注目すべきものに与えるものとしては，驚くほど単純である．

しかしながら，本書の目的は四元数と八元数との性質をそれらの中で発展させることであったので，ここでは，それらの応用に向けてのヒントとなるこの結果で満足することとする．

[2] 第 3 刷での追記：この定理についての注意を与えてくれ，'特殊' の定義を一般化して x_0, x_1, x_2 がある四元部分代数に属しているとすることにより，この定理の証明が簡約化されることを指摘してくれた Warren Smith に感謝する．

関連図書

[1] A. A. Albert. Quadratic forms permitting composition. *Annals of Mathematics*, 43:161–177, 1942.

[2] D. Allcock. Identifying models of the octave projective plane. *Geometriae Dedicata*, 65:215–217, 1997.

[3] S. L. Altmann. *Rotations, Quaternions, and Double Groups.* Clarendon Press, Oxford, 1986.

[4] H. Aslaksen. Restricted homogeneous coordinates for the Cayley projective plane. *Geometriae Dedicata*, 40:245–250, 1991.

[5] J. Baez. The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39:145–205, 2002.

[6] H. F. Blichfeldt. The minimum values of positive quadratic forms in six, seven, and eight variables. *Mathematische Zeitschrift*, 39:1–15, 1935.

[7] H. Brown, R. Bülow, J. Neubüser, H. Wondratschek, and H. Zassenhaus. *Crystallographic groups of four-dimensional space.* John Wiley and Sons, New York, 1978.

[8] R. H. Bruck and E. Kleinfeld. The structure of alternative division rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2:878–890, 1951.

[9] A. Cayley. On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions. *Philosophical Magazine*, 26:208–211, 1845.

[10] A. Cayley. On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions (appendix only). In *The Collected Mathematical Papers*, page 127. Johnson Reprint Co., New York, 1963.

[11] H. S. M. Coxeter. Integral Cayley numbers. *Duke Math Journal*, 13:561–578, 1946.

[12] M. J. Crowe. *A History of Vector Analysis.* University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1967.

[13] C. W. Curtis. The four and eight square problem and division algebras. In A. Albert, editor, *Studies in Modern Algebra*, pages 100–125. Prentice-Hall, New Jersey, 1963.

[14] L. E. Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. *Annals of Mathematics*, 20:155–171 and 297, 1919.
[15] L. E. Dickson. *Algebras and Their Arithmetics.* University of Chicago Press, 1923.
[16] C. J. Feaux. Divisor matrices in the Cayley ring. *Journal of Number Theory*, 5:502–523, 1973.
[17] H. Freudenthal. Lie groups in the foundations of geometry. *Advances in Mathematics*, 1:145–190, 1964.
[18] H. Freudenthal. Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. *Geometriae Dedicata*, 19:7–63, 1985.
[19] T. Gosset. On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions. *Messenger Math.*, 29:43–48, 1900.
[20] M. E. Goursat. Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. *Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure*, 6:9–102, 1889.
[21] R. P. Graves. *Life of Sir William Rowan Hamilton.* Arno Press, New York, 1975.
[22] R. Guy. Catwalks, sandsteps, and Pascal pyramids. *Journal of Integer Sequences*, 3, 2000. Article 00.1.6.
[23] W. R. Hamilton. *The Mathematical Papers of William Rowan Hamilton, Appendix 3*, volume 3. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
[24] T. L. Hankins. *Sir William Rowan Hamilton.* Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1980.
[25] A. C. Hurley. Finite rotation groups and crystal classes in four dimensions. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, pages 650–661, 1951.
[26] A. Hurwitz. Über die Komposition der quadratische Formen von beliebig vielen Variabeln. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pages 309–316, 1898.
[27] I. Kaplansky. Infinite-dimensional quadratic forms admitting composition. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4:956–960, 1953.
[28] A. Korkine and G. Zolotareff. Sur les formes quadratique positives. *Mathematische Annalen*, 11:242–292, 1877.
[29] J. B. Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences.* Princeton University Press, 2002.
[30] P. J. C. Lamont. Ideals in Cayley's algebra. *Indagationes Mathematicae*, 25:394–400, 1963.
[31] M. Liebeck. The classification of finite simple Moufang loops. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 102:33–47, 1987.
[32] K. Mahler. On ideals in the Cayley-Dickson algebra. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 48:123–133, 1942.
[33] R. Moufang. Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit (D_9). *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 9:207–222, 1933.
[34] A. Pfister. Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. *Inventiones Mathematicae*, 4:229–237, 1967.

[35] I. Porteous. *Topological Geometry.* Cambridge University Press, 1981.

[36] R. A. Rankin. A certain class of multiplicative functions. *Duke Mathematical Journal*, 13:281–306, 1946.

[37] H. P. Rehm. Prime factorization of integral Cayley octaves. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2:271–289, 1993.

[38] O. Rodrigues. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5:380–440, 1840.

[39] H. J. S. Smith. On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates. *Proceedings of the Royal Society*, 16:197–208, 1867.

[40] W. Threlfall and H. Seifert. Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. *Mathematische Annalen*, 104:1–70, 1931.

[41] P. Du Val. *Homographies, Quaternions, and Rotations.* Oxford University Press, Oxford, 1964.

[42] F. van der Blij. History of the octaves. *Simon Stevin*, pages 106–125, 1961.

[43] F. van der Blij and T. A. Springer. The arithmetics of octaves and of the group G_2. *Indagationes Mathematicae*, 21:406–418, 1959.

[44] M. Zorn. The automorphisms of Cayley's non-associative algebra. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 21:355–358, 1935.

訳者あとがき

John H. Conway 氏に初めてお会いしたのは，トロント大学での彼の講演を聞いたときでした．普通の談話会ならば半分も席が埋まらない会場に聴衆が押しかけて，立ち見どころか部屋に入れない人が廊下にもあふれたため，急遽，他の会場で行われることになりました．たしか，3 次元図形のシンメトリーについて話をされていたと思いますが，おもむろに机を (といっても小さめのパイプ机ですが) 片手で持ち上げて，くるくる回しながら解説をはじめたときには，聴衆から喝采が上がりました．ちょうどその当時，トロント大学の図書館で，彼が執筆した “On Numbers and Games” という，残念ながら当時は絶版となっていた本 (現在は出版社を代えて再販されています) をみつけて，その卓越的なアイディアにただただ驚いていたところでしたので，談話会の後，ご本人にいくつか質問したことも憶えております．

今回，培風館から本書の原書 “On Quaternions and Octonions” の翻訳を打診されたときは，一度は，専門外であるということで断ったのですが，結局，Conway 氏の本を訳せるという魅力につられて翻訳をさせていただくことにしました．

本書は，すでに古典的なものと見なされている四元数および八元数の，代数的な側面と幾何的な側面とについて，新しい見地から独特の方法で解説したものです．また，本書で初めて明らかにされた新しい結果も多く含まれています．

四元数を用いて 3 次元群を分類することは古くから行われていますが，本書

では，キラルとアキラル，さらに一倍体と二倍体という新しい用語で分類し，著者が“代数的記法”とよぶ群の表記法によって，それを組織的に表しています．また，4次元群については，本書で初めてその分類表が完成されたといってもいいでしょう．ここでも，4次元群を表すために，著者らしい合理的な表記法が導入されています．空間群のキラル性がもつ微妙さについても解説していますが，その中で，「右の靴と左の靴とは区別できるのに，右の馬鈴薯と左の馬鈴薯とはなぜ区別できないのか」という問いかけは，絶妙なものであります．八元整数についての精密な考察も，本書で初めてなされました．八元整数は何であるべきかという根本的な問いかけからはじまり，結合律が成り立たない中での分解定理を作り上げ，また，整数の部分環の安定化群についても考察を深めています．

このように，本書は，すでに歴史的なものだと見なされているものに光を当て，新しい息吹を吹き込み，さらに，その結果を合理的かつ洗練された方法で表現した本であり，著者ならではの卓越したアイディアがここにも生きています．

原著には，専門書でありながら，独特の物語風の言い回しがあります．その表現の妙を残しながら，数学的に曖昧さのないすっきりとした日本語に訳すのは，語彙力と表現力の乏しい私にとっては苦行のようなものでした．また，原著には，大きく開いた行間があり，それを埋めるのも一苦労でした．そのため，そのメモ書きのようなものですが，読者の理解の助けになればと思い，訳注を多く設けてます．

著者のDerek A. Smith氏には，お忙しく，またご健康も優れない中，原著の内容に関しての不躾な質問に親切に答えていただき，大変感謝しております．大阪工業大学講師の丸井洋子さんには，原稿のチェックをしていただき，大変助かりました．最後に，培風館編集部の岩田誠司氏には，原稿の大幅な遅れでご迷惑をおかけしたにも関わらず，最後まで面倒をみていただき，また表現に関しても適切な指摘をいただき，心から感謝いたします．

2006年　盛夏

著 者 識

索　引

人名

欧文・記号

A

C

さ 行

や　行

ら　行

訳者略歴

山田修司（やまだ しゅうじ）

1985年　大阪大学大学院理学研究科博士課程前期修了
1986年　同後期課程中退
1986年　愛媛大学理学部助手
1989年　大阪大学 理学博士取得
1991年　京都産業大学理学部講師
現　在　京都産業大学理学部教授

主要著書

コンピュータによる結び目理論入門
（共著，牧野書店，1996）
Mathematica で楽しむ数理科学
（牧野書店，1999）

2006年11月28日　初　版　発　行

四元数と八元数
幾何，算術，そして対称性

著　者　J. H. コンウェイ
　　　　D. A. スミス
訳　者　山田修司
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培　風　館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

中央印刷・牧 製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-00369-7 C3041